Garbeneigenschaft exzessiver Funktionen bei Markov-Prozessen

Jutta Steffens

Düsseldorf 1982

Garbeneigenschaft exzessiver Funktionen bei Markov-Prozessen

I n a u g u r a l - D i s s e r t a t i o n

zur

Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Düsseldorf

vorgelegt von
Jutta Steffens
aus Düsseldorf

Düsseldorf
1982

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Berichterstatter: Prof. Dr. K. Janßen
2. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Klinger

Tag der mündlichen Prüfung: 19.November 1982

Zusammenfassung

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Untersuchung exzessiver Funktionen bei Markov-Prozessen, speziell mit der Frage, wie sich Exzessivität lokal beschreiben läßt.

Für Standard-Prozesse (das sind Markov-Prozesse mit Pfadregularitäten von links und rechts) hat Shur 1962 eine lokale Charakterisierung von Exzessivität in der Ausgangstopologie des Zustandsraumes angegeben. Für Rechts-Prozesse (das sind Markov-Prozesse mit Pfadregularitäten (nur) von rechts) ist eine entsprechende Beschreibung im allgemeinen falsch.

Es werden nur Rechts-Prozesse betrachtet, die auf den Nicht-Branch-Punkten von markovschen Ray-Resolventen leben. Allgemeine Rechts-Prozesse unterscheiden sich von diesen im wesentlichen durch eine 'Sättigung' des Zustandsraumes. Auf der Nicht-Branch-Punkt-Menge wird eine sog. 'Choquet-Topologie' definiert. Bezüglich dieser im allgemeinen nicht separierten Topologie haben die Prozesse rechtsstetige Pfade mit Linkslimiten im Zustandsraum und sind quasilinksstetig. Exzessivität läßt sich dann global beschreiben über die Austrittsverteilungen des Prozesses aus Choquet-offenen Mengen. Ferner kann man - falls die Choquet-Topologie lokal-quasi-kompakt ist - für einen Begriff von 'exzessiv auf Choquet-offenen Mengen' eine Garbeneigenschaft zeigen und erhält so insbesondere eine in der Choquet-Topologie lokale Charakterisierung der exzessiven Funktionen. Der Beweis hierzu orientiert sich an den Ideen des Shur'schen Beweises für Standard-Prozesse.

Transiente Rechts-Prozesse des betrachteten Typs mit Referenzmaß sind über den Kegel der exzessiven Funktionen gekoppelt an die Potentialtheorie der H-Kegel von Boboc/Bucur/Cornea. Die exzessiven Funktionen bilden einen Standard-H-Kegel, der sich auf den Extremalpunkten eines Choquet-Simplexes darstellen läßt. Hier stimmen Choquet- und faziale Topologie überein. Nach Identifizierung von Austrittsverteilungen des Prozesses mit harmonischen Maßen erhält man - im wesentlichen falls die faziale Topologie lokal-quasi-kompakt ist - ein assoziiertes hyperharmonisches Garbendatum und damit eine lokale harmonische Struktur zu Standard-H-Kegeln.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41535714_0033

Inhalt

Einleitung		1
§ 0	Notation	7
Kapitel I	Rechts-Prozesse und Standard-H-Kegel	12
§ 1	Ray-Resolventen und Rechts-Prozesse	12
§ 2	Exzessive Funktionen bei Rechts-Prozessen	21
§ 3	Standard-H-Kegel	32
Kapitel II	Choquet- und faziale Topologien	42
§ 4	Topologien auf Choquet-Rändern	42
§ 5	Lokale Eigenschaften und Borel-Struktur	52
§ 6	Die $\mathfrak{f}$-Choquet-Topologie bei Ray-Resolventen	63
Kapitel III	Choquet-Lokalisierung bei Rechts-Prozessen	72
§ 7	Ray-Prozesse in der $\mathfrak{f}$-Topologie auf D	72
§ 8	Lokalisierung und Garbeneigenschaft	80
§ 9	$\mathfrak{f}$-Lokalisierung bei Rechts-Prozessen und Standard-H-Kegeln	90
§ 10	Schlußbemerkungen	100
Begriffs-Index		103
Symbol-Index		106
Literaturverzeichnis		108

Einleitung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung von Lokalisierungen exzessiver Funktionen bei speziellen Klassen von Markov-Prozessen.

Exzessive Funktionen sind häufig auffaßbar als Sublösungen von Integro-Differentialgleichungen. Beispielsweise bilden die exzessiven Funktionen der Brownschen Bewegung im $\mathbb{R}^3$ die positiven unterhalbstetigen Sublösungen (im Distributionssinn) der Laplace-Gleichung. Da der Laplace-Operator ein lokaler Operator ist, ist Exzessivität hier trivialerweise eine lokale Eigenschaft. Die exzessiven Funktionen des Brownschen Prozesses bilden andererseits gerade die klassischen positiven hyperharmonischen Funktionen.

Eine entsprechende Kopplung von gewissen Markov-Prozessen an harmonische Strukturen über den Kegel der exzessiven Funktionen liegt auch bei axiomatischen Potentialtheorien vor (vgl. z.B. die Theorien der harmonischen Räume [3,13]; der Potentialkegel [32,33]; der Balayage-Räume [4,15]; der H-Kegel [7,8]). Im allgemeinen treten hier aber Prozesse mit nicht stetigen Pfaden auf, deren Erzeuger keine lokalen Operatoren sind.

In solchen Fällen stellt sich die Frage, bezüglich welchen Umgebungsbegriffes sich Exzessivität noch als lokale Eigenschaft erweist. Diese kann man beantworten, indem man für einen geeignet definierten Begriff von 'lokal exzessiv' eine Garbeneigenschaft nachweist. Einen speziellen Aspekt dieses Problems liefert bei denjenigen Potentialtheorien, deren Axiomatik von einem globalen Kegel ausgeht, die Frage nach einem assoziierten (hyper-)harmonischen Garbendatum (wie es bei harmonischen Räumen postuliert ist).

Für Standard-Prozesse allgemein (d.h. ohne Voraussetzung der Stetigkeit der Pfade) hat Shur [34] 1962 gezeigt, daß Exzessivität eine lokale Eigenschaft in der Ausgangs-Topologie ist. Sein Beweis benutzt wesentlich die Linksregularitäten der

Standard-Prozesse. Für Rechts-Prozesse (das sind Markov-Prozesse, bei denen keine Linksregularitäten postuliert werden) trifft die entsprechende Aussage schon in einfachen Beispielen nicht zu.

Rechts-Prozesse treten in den harmonischen Potentialtheorien als assoziiert zu Standard-H-Kegeln auf. Die Theorie der H-Kegel von Boboc/Bucur/Cornea [7,8] geht aus von einem geordneten Kegel mit Eigenschaften, die die Definition der üblichen globalen potentialtheoretischen Objekte erlauben. Standard-H-Kegel lassen sich stets auf den Extremalpunkten von Choquet-Simplexen realisieren und zwar als Funktionenkegel, die im wesentlichen die exzessiven Funktionen zu bestimmten Rechts-Prozessen bilden. Gemäß Janßen [25] entsprechen dabei die von Bliedtner/Hansen [4] eingeführten Standard-Balayage-Räume solchen Standard-H-Kegeln, die sich auf Bauer-Simplexen realisieren lassen.

Einfache Beispiele von Standard-H-Kegeln legen die Vermutung nahe, daß Exzessivität (für den zugehörigen Rechts-Prozeß) eine lokale Eigenschaft in der auf den Extremalpunkten definierten fazialen Topologie darstellt. Im Falle von Bauer-Simplexen stimmt diese bekanntlich mit der Ausgangs-Topologie überein, so daß sich für die zu Balayage-Räumen assoziierten Standard-Prozesse das Resultat von Shur ergibt (sobald eine entsprechende Garbeneigenschaft in der fazialen Topologie nachgewiesen ist).

Für einen Rechts-Prozeß auf einem Zustandsraum E sprechen wir im folgenden von Lokalisierung der exzessiven Funktionen in einer Topologie τ auf E, falls zu jeder τ-offenen Menge σ ein Kegel von 'in σ exzessiven' Funktionen definiert ist, der für $\sigma = E$ den Kegel der exzessiven bildet. Gesucht sind solche Lokalisierungen, für die die Garbeneigenschaft gilt, d.h. für die Exzessivität in $\bigcup_i \sigma_i$ äquivalent ist zur Exzessivität in jedem der σ_i (für τ-offene σ_i). Für Lokalisierungen, die die Garbeneigenschaft erfüllen, folgt dann speziell, daß Exzessivität eine in der Topologie τ lokale Eigenschaft ist.

Der Lokalisierung von Shur entspricht bei den Standard-Balayage-Räumen der Begriff von 'lokal-hyperharmonisch', wie er in [4] definiert ist. Eine entsprechende lokale Struktur bei Standard-H-Kegeln ist bisher nicht betrachtet worden. Sie ergibt sich nach oben Gesagtem aus einer Lokalisierung der exzessiven Funktionen in der fazialen Topologie, falls diese die Garbeneigenschaft besitzt.

Wir beschränken uns im folgenden auf Rechts-Prozesse, die als Restriktionen von Ray-Prozessen auf deren Nicht-Branch-Punkte auftreten. Zu Standard-H-Kegeln beispielsweise existieren Rechts-Prozesse von dieser Form. Beliebige Rechts-Prozesse führen mittels Ray-Kompaktifizierung nach einer Topologie-Änderung und einer 'Sättigung' des Zustandsraumes zu den hier betrachteten Prozessen. Der Zustandsraum dieser Prozesse - also die Nicht-Branch-Punkt-Menge zu einer Ray-Resolvente - läßt sich als Choquet-Rand bzgl. eines Kegels stetiger Funktionen interpretieren. Nun haben auf Choquet-Rändern Boboc/Bucur [6] sog. 'Choquet-Topologien' definiert, die sich als verallgemeinerte faziale Topologien erweisen.

In dieser Arbeit wird gezeigt, daß die auf den Nicht-Branch-Punkten einer Ray-Resolvente auf einem Kompaktum definierte Choquet-Topologie (als '$\mathcal{G}$-Topologie' bezeichnet) im H-Kegel-Kontext mit der fazialen übereinstimmt. Ferner wird eine Lokalisierung der exzessiven Funktionen in der $\mathcal{G}$-Topologie angegeben, die im Balayage-Raum-Kontext mit der bekannten zusammenfällt.

Unter der Voraussetzung der Lokal-Quasi-Kompaktheit der $\mathcal{G}$-Topologie wird überdies die Garbeneigenschaft dieser Lokalisierung nachgewiesen. Wesentlich beim Beweis, der sich an den Ideen des Shur'schen Beweises für Standard-Prozesse orientiert, ist, daß die Rechts-Prozesse in der $\mathcal{G}$-Topologie neben der Rechtsstetigkeit der Pfade auch Linksregularitäten aufweisen.

Als Folgerung ergibt sich, daß unter obigen Voraussetzung an die $\mathcal{G}$-Topologie Exzessivität bei den hier betrachteten Rechts-Prozessen eine in dieser Topologie lokale Eigenschaft ist.

Der Inhalt der Arbeit gliedert sich in drei Teile. Kapitel I (§§ 1-3) stellt einige im folgenden benötigte Begriffe und Ergebnisse aus Prozeß- und Potentialtheorie zusammen. In Kapitel II (§§ 4-6) werden Choquet-Topologien eingeführt und im Kontext einer allgemeinen Choquet-Theorie untersucht. Kapitel III (§§ 7-9) enthält die Definition von Lokalisierungen stark supermedianer bzw. exzessiver Funktionen bei gewissen Rechts-Prozessen und - unter bestimmten Voraussetzungen an die Topologie - den Nachweis der Garbeneigenschaft, ferner Folgerungen für Standard-Prozesse und Rechts-Prozesse zu Ray-Resolventen.

§ 1 führt Rechts- und Ray-Prozesse ein in dem von Getoor [21] (bzw. Blumenthal/Getoor [5]) gesteckten Rahmen.

In § 2 werden auf Ergebnisse von Mertens [28] gestützte Charakterisierungen stark supermedianer und exzessiver Funktionen bei Rechts-Prozessen angegeben (vgl. 2.12-2.15). Im Falle von Standard-Prozessen erhält man in (2.16) ein Ergebnis von Shur [34].

§ 3 faßt einige Ergebnisse der H-Kegel-Theorie [8] zusammen, stellt den Zusammenhang mit den exzessiven Funktionen von Rechts-Prozessen her (vgl. 3.4/3.5/3.8) und ordnet die Balayage-Räume in diesen Kontext ein (vgl. 3.10).

§ 4 stellt Ergebnisse von Boboc/Cornea [9] im Rahmen einer allgemeinen Choquet-Theorie bereit und knüpft an eine Arbeit von Boboc/Bucur [6] an, wo Choquet-Topologien auf den zugehörigen Choquet-Rändern definiert werden. Diese sind im allgemeinen nicht separiert und gröber als die Ausgangs-Topologie. Satz (4.13) verallgemeinert (vgl. 4.15) das entsprechende Ergebnis von Boboc/Bucur [6] über Äquivalenzen zur Gleichheit von Choquet- und Ausgangs-Topologie. Als spezielles Beispiel (vgl. 4.4.3/4.12.3) wird ein kompakter, metrisierbarer Raum (K,τ) mit einer markovschen Ray-Resolvente $(V_\alpha)_{\alpha>0}$ und dem Kegel $\mathcal{G} := \mathcal{S}_c^\infty + \mathbb{R}$, sowie der $\mathcal{G}$-(Choquet-)Topologie genannt (wobei $\mathcal{S}_c^\infty$ die Vereinigung aller stetigen bzgl. (V_α) α-supermedianen Funktionen bezeichnet). Der zugehörige Choquet-Rand besteht aus der Menge D der Nicht-Branch-Punkte von

(V_α) (vgl. 4.6).

In § 5 werden in Anlehnung an entsprechende Ergebnisse von Gleit [22,23] (im Kontext von Simplex-Räumen etc.) spezielle lokale Eigenschaften der Choquet-Topologien untersucht. Insbesondere interessieren Konvergenzeigenschaften (vgl. 5.2/5.3), sowie äquivalente topologische Aussagen zur Existenz einer abzählbaren Basis (vgl. 5.9). Als hinreichend hierfür erweist sich in (5.10) die Lokal-Quasi-Kompaktheit.
Zum Verhältnis der Borel-Strukturen von Choquet- und Ausgangs-Topologie liefert (5.15) die Gleichheit der universellen Vervollständigungen.

In § 6 wird das Beispiel (4.4.3) einer Ray-Resolvente auf kompaktem Raum K mit Kegel $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}$-Topologie aufgegriffen, und unter Verwendung der Aussagen des Paragraphen 4 sowie Ausnutzung von Methoden in [6] wird gezeigt:
$(K,\mathcal{G})$ ist simplizial; die Initialkerne Q_0 der Ray-Halbgruppe (Q_t) liefern die eindeutigen minimalen Maße $Q_0(x,\cdot)$ unterhalb von Einheitsmassen ε_x (vgl. 6.2). Hiermit ergibt sich eine Charakterisierung (6.7/8) der $\mathcal{G}$-abgeschlossenen Mengen des Choquet-Randes. Im H-Kegel-Kontext stimmt die zugehörige faziale Topologie auf den Extremalpunkten des Darstellungs-Simplexes mit der $\mathcal{G}$-Topologie überein (vgl. 6.12).

§ 7 leitet unter Benutzung der Ergebnisse von Getoor [21] sowie der Ergebnisse des Kapitels II Eigenschaften der Rechts-Prozesse in der $\mathcal{G}$-Topologie auf D her: die $\mathcal{G}$-Rechtsstetigkeit der Pfade mit $\mathcal{G}$-Linkslimiten in D (vgl. 7.4) sowie die $\mathcal{G}$-Quasilinksstetigkeit (vgl. 7.7).

In § 8 wird für bestimmte Rechts-Prozesse, die die Voraussetzungen (8.1) erfüllen (speziell Lokal-Quasi-Kompaktheit einer Choquet-Topologie), die Garbeneigenschaft eines Prägarbendatums $\underline{\underline{J}}$ (vgl. Definition 8.3) gezeigt unter Verwendung der Beweisidee von Shur [34].
Als Folgerungen ergeben sich in (8.11) der Satz von Shur [34] für Standard-Prozesse, in (8.12/8.13) für Rechts-Prozesse zu Ray-Resolventen (mit lokal-quasi-kompakter Choquet-Topologie auf D) eine Lokalisierung der stark supermedianen Funktionen,

die die Garbeneigenschaft besitzt.

Der § 9 enthält Folgerungen für Rechts-Prozesse bzw. Standard-H-Kegel:
Für einen Rechts-Prozeß Y auf E im Rahmen von (9.1) mit Übergangshalbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$ und $\mathcal{G}$-Choquet-Topologie $\tau_{\mathcal{G}}"$ auf E bezeichne für $\mathcal{O}\in\tau_{\mathcal{G}}"$ $\mathcal{T}(\mathcal{O})$ eine Klasse meßbarer Funktionen f in E, die nach unten geeignet beschränkt sind und für alle $\tau_{\mathcal{G}}"$-quasi-kompakt in $\mathcal{O}$ liegenden $U\in\tau_{\mathcal{G}}"$ die Ungleichungen $\pi_U f \leq f$ erfüllen (mit den Austrittskernen π_U) (vgl. 9.2).
Unter der Voraussetzung der Lokal-Quasi-Kompaktheit von $\tau_{\mathcal{G}}"$ und der Existenz einer $\tau_{\mathcal{G}}"$-quasi-kompakten Ausschöpfung von E bildet dann gemäß (9.6) $(\mathcal{T}_+(\mathcal{O}))_{\mathcal{O}\in\tau_{\mathcal{G}}"}$ ein Garbendatum, und es ist $\mathcal{T}_+(E)$ die Menge der stark supermedianen Funktionen und

$$\mathcal{E}(E) := \left\{ f\in\mathcal{T}_+(E) \;\middle|\; t\longmapsto f\circ X_t \text{ ist } P^x\text{-f.s. rechtsseitig unterhalbstetig in } t=0 \text{ für alle } x\in E \right\}$$

die Menge der exzessiven Funktionen.
Für Standard-H-Kegel liefern gemäß (9.16) die Klassen ${}^2\mathcal{K}^*(\mathcal{O}) := \left\{ f\in\mathcal{T}(\mathcal{O}) \mid f \text{ } \tau\text{-unterhalbstetig in } \mathcal{O} \right\}$ ($\mathcal{O}\subset E$ fazial-offen) eine lokale harmonische Struktur, sofern die faziale Topologie auf E die obigen Voraussetzungen (vgl. 9.16.i/ii) erfüllt.

Für Standard-Balayage-Räume leitet man hieraus auf Grund der Eigenschaften der Doob-Transformation ein hyperharmonisches Garbendatum her, das bzgl. der Beschränktheits- (und Meßbarkeits-)Bedingungen dasjenige bei Bliedtner/Hansen [4] verallgemeinert (vgl. 9.19).

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. D. K. Janßen für seine geduldige Unterstützung bei dieser Arbeit.

Herrn Prof. Dr. A. Cornea danke ich für einige interessante Gespräche und Herrn Dr. V. Dembinski für viele hilfreiche Diskussionen.

§ 0 Notation

Zunächst werden einige allgemeine im folgenden verwendete Redeweisen, Bezeichnungen und Symbole aufgeführt. Man beachte ferner den Index am Schluß der Arbeit (Seite 103ff).

0.1 Es bezeichnen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ die natürlichen, rationalen, reellen Zahlen; $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, $\mathbb{Q}_+ := \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+$, $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Als mengentheoretische Abkürzungen werden die üblichen $(\cup, \cap, \setminus, \in, \subset)$ verwendet, $\emptyset$ für die leere Menge und $\complement$ für das Komplement einer Menge, falls klar ist bezüglich welcher Obermenge.

Das Infimum (bzw. Supremum) einer Menge von Zahlen in $\overline{\mathbb{R}}$ wird mit inf (bzw. sup) abgekürzt, speziell gilt die Vereinbarung $\inf \emptyset = \infty$, $\sup \emptyset = -\infty$; lim, $\overline{\lim}$ kürzt den limes inferior bzw. limes superior einer Folge von Zahlen ab.

0.2 Als (numerische) Funktionen werden Abbildungen mit Wertebereich $\overline{\mathbb{R}}$ bezeichnet; Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$ (bzw. $\overline{\mathbb{R}}_+ := [0, \infty]$, bzw. $(0, \infty]$) werden reell oder endlich (bzw. positiv, bzw. strikt positiv) genannt.

$\inf(f,g)$ (bzw. $\sup(f,g)$) bezeichnet das punktweise Infimum (bzw. Supremum) zweier Funktionen f und g. Mit $f_{|A}$ wird die Restriktion einer Funktion f auf eine Teilmenge A ihres Definitionsbereiches bezeichnet.

Ist M eine Menge von Funktionen mit gleichem Definitionsbereich und $g \in M$, so bedeutet: $M_{|A} := \{f_{|A} \mid f \in M\}$, $g \cdot M := \{g \cdot f \mid f \in M\}$, $M + \mathbb{R} := \{f + c \mid f \in M,\ c \in \mathbb{R}\}$.

Für eine Menge M von Funktionen bezeichnet eine Indizierung $+$, e, c, b die positiven, endlichen, stetigen endlichen, beschränkten Funktionen in M.

Ist E ein topologischer Raum, so bezeichnen $\mathcal{C}(E)$ (bzw. $\mathcal{C}_\ell(E)$) die stetigen reellen (bzw. unterhalbstetigen,

$(-\infty,\infty]$-wertigen) Funktionen auf E, $\mathcal{B}(E)$ (bzw. $\mathcal{B}^u(E)$, bzw. $\mathcal{B}^n(E)$) die Borel- (bzw. universell-Borel-, bzw. nahezu- (vgl. 0.7)) meßbaren Funktionen.

Falls E lokalkompakt ist (vgl. 0.3), bezeichnet $\mathcal{C}_o(E)$ die im Unendlichen verschwindenden Funktionen in $\mathcal{C}(E)$.

0.3 Es sei (E,τ) ein topologischer Raum. Dann bezeichnet τ auch die Menge der τ-offenen Teilmengen von E, was Schreibweisen wie '$\mathcal{O}\in\tau$' erklärt. Für einen Teilraum $F\subset E$ wird die Relativ-Topologie von τ mit $\tau_{|F}$ bezeichnet. Für eine Teilmenge $A\subset E$ bezeichnen $\mathring{A}$ (bzw. $\bar{A}$) den offenen Kern (bzw. Abschluß) von A in (E,τ).

Die Begriffe (quasi-)kompakt, relativ-(quasi-)kompakt, lokal-(quasi-)kompakt werden wie bei Bourbaki [10]-I §9/ Ex. 9.29 benutzt. Speziell ist ein kompakter Raum separiert, und es ist ein Raum lokal-quasi-kompakt, wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus quasi-kompakten Mengen besitzt.

Als Kompaktifizierung (K,τ') von (E,τ) wird ein kompakter Raum (K,τ') bezeichnet, in den E τ'-dicht eingebettet ist.

Die Begriffe Netz, Teilnetz etc. werden wie bei Kelley [26]-Ch. 2 benutzt. Von (τ-)Konvergenz eines Netzes $(x_i)_{i\in I}\subset E$ gegen einen Punkt $x\in E$ (i.Z.: $x_i \xrightarrow[i\in I]{\tau} x$, oder ähnlich) wird (auch falls τ nicht separiert ist) gesprochen, sofern (x_i) schließlich in jeder τ-Umgebung von x liegt. Dabei heißt U (τ-)Umgebung von x, falls $x\in\mathring{U}$.

Die σ-Algebra der Borel-Mengen in E wird mit $\mathcal{B}(E,\tau)$ (kurz: $\mathcal{B}(E)$) bezeichnet, die der universell (Borel-)meßbaren Mengen in E mit $\mathcal{B}^u(E,\tau)$ (bzw. kurz $\mathcal{B}^u(E)$). $\mathcal{B}^n(E,\tau)$ (bzw. kurz $\mathcal{B}^n(E)$) bezeichnet die σ-Algebra der nahezu-meßbaren Mengen (vgl. 0.7).

Ist $\mathcal{M}$ ein Mengensystem, so bezeichnet $\sigma(\mathcal{M})$ die kleinste $\mathcal{M}$ enthaltende σ-Algebra, analog für eine Funktionenklasse $\mathcal{F}$ $\sigma(\mathcal{F})$ die kleinste σ-Algebra, bzgl. derer alle Funktionen in $\mathcal{F}$ meßbar sind.

0.4 Für einen Meßraum $(E,\mathcal{E})$ bezeichnet $\mathcal{M}^+(E)$ (ausführlich: $\mathcal{M}^+(E,\mathcal{E})$) die Menge der positiven Maße - kurz 'Maße' genannt -, $\mathcal{M}^+_e(E)$ (bzw. $\mathcal{M}^+_1(E)$) die endlichen (bzw. Wahrscheinlichkeits-) Maße auf $(E,\mathcal{E})$.

Für $x \in E$ bezeichnet ε_x die Einheitsmasse in x.

Ist $\mu \in \mathcal{M}^+(E)$, so bezeichnet $\mathcal{E}^\mu$ die μ-Vervollständigung von $\mathcal{E}$; $\mathcal{E}^u$ bezeichnet die universelle Vervollständigung von $\mathcal{E}$. Abweichend hiervon sind Notationen $\mathcal{F}^\mu$ und $\mathcal{F}^\mu_t$ bei Prozessen (vgl. 1.4.a).

Ist $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$ für einen topologischen Raum E und $\mu \in \mathcal{M}^+(E)$, so wird der Träger von μ in E mit $\mathrm{Tr}\mu$ abgekürzt.

Falls eine Funktion f auf E bzgl. eines Maßes $\mu \in \mathcal{M}^+(E)$ μ-quasi-integrierbar ist, so wird das Integral $\int f d\mu$ auch als $\mu(f)$ geschrieben.

Sind $\mu,\nu \in \mathcal{M}^+(E)$ und ist M eine Menge von μ,ν-quasi-integrierbaren Funktionen auf E mit $\mu(f) \leq \nu(f)$ für alle $f \in M$, so schreiben wir abkürzend $\mu \overset{\prec}{}_M \nu$.

0.5 Ist K eine kompakte konvexe Menge in einem lokalkonvexen Hausdorff-Raum, so bezeichnet $\mathcal{A}(K)$ (bzw. $\mathcal{R}(K)$) die affinen (bzw. konkaven) Funktionen auf K. Für $\mu \in \mathcal{M}^+_1(K)$, $x \in K$ heißt μ Darstellungsmaß für x (bzw. x Schwerpunkt von μ), falls $\mu(f) = f(x)$ ist für alle $f \in \mathcal{A}_c(K)$. $x \in K$ ist Extremalpunkt von K (i.Z. $x \in \mathrm{Ext}\, K$), falls ε_x das einzige Darstellungsmaß für x ist.

Auf $\mathcal{M}^+_e(K)$ heißt die durch $\mu \overset{\prec}{}_{\mathcal{R}_c(K)} \nu$ definierte Ordnung die Bishop-DeLeeuw-Ordnung (vgl. [1]-I-(3.4)). Jedes $x \in K$ besitzt ein bzgl. dieser Ordnung minimales Darstellungsmaß, welches - falls K metrisierbar ist - von der Menge $\mathrm{Ext}\, K$ getragen wird (vgl. [1]-I-(4.9)). K heißt (Choquet-)Simplex, wenn jedes $x \in K$ genau ein solches minimales Darstellungsmaß besitzt. Ein Choquet-Simplex heißt Bauer-Simplex, wenn $\mathrm{Ext}\, K$ in K abgeschlossen ist.

Für einen Simplex K liefern die Durchschnitte der abgeschlossenen Seiten (bzw. im Falle $o \in K$: die abgeschlossenen Seiten, die die o enthalten) mit $\operatorname{Ext} K$ die (nicht leeren) abgeschlossenen Mengen der fazialen (bzw. strukturellen) Topologie auf $\operatorname{Ext} K$ (vgl. [1]-S.143, [18]-§ 4).

0.6 Die Bezeichnungsweisen im Zusammenhang mit Resolventen, Halbgruppen und Markov-Prozessen sind im wesentlichen die aus Blumenthal/Getoor [5], bzw. Getoor [21].

Ist $K(\cdot,\cdot)$ ein Kern über einem Meßraum $(E,\mathcal{E})$, so wird das Integral einer Funktion f nach einem Maß $K(x,\cdot)$ als $Kf(x)$ geschrieben. Ein Kern K heißt (sub-)markovsch, falls alle Maße $K(x,\cdot)$ $(x \in E)$ (Sub-)Wahrscheinlichkeitsmaße sind.

Für eine submarkovsche Halbgruppe $(P_t)_{t\geq o}$ von Kernen P_t über $(E,\mathcal{E})$, für die die Resolvente $(U_\alpha)_{\alpha>o}$ für $f \geq o$ durch $U_\alpha f(x) := \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t f(x)dt$ definiert werden kann, heißt $(U_\alpha)_{\alpha>o}$ 'die zu $(P_t)_{t\geq o}$ gehörige Resolvente'.

Der Initialkern einer Halbgruppe $(P_t)_{t\geq o}$ ist P_o ; der Initialkern oder Potentialkern U_o einer Resolvente $(U_\alpha)_{\alpha>o}$ ist definiert durch $U_o f := \sup_{\alpha>o} U_\alpha f$. U_o wird als eigentlich bezeichnet, falls eine strikt positive $\mathcal{E}$-meßbare Funktion f existiert, so daß $U_o f$ beschränkt ist.

Eine Resolvente $(U_\alpha)_{\alpha\geq o}$ auf $(E,\mathcal{E})$ heißt absolut stetig, falls ein endliches Maß auf E existiert, bzgl. dessen alle Maße $U_\alpha(x,\cdot)$ absolut stetig sind $(\alpha \geq o,\ x \in E)$.

Es sei $(U_\alpha)_{\alpha>o}$ eine sub-markovsche Resolvente über $(E,\mathcal{E})$: Eine $\mathcal{L}^U$-meßbare positive Funktion f heißt α-supermedian, falls $\beta U_{\alpha+\beta} f \leq f$ für alle $\beta > o$ ist (für $\alpha \geq o$). Eine α-supermediane Funktion f heißt α-exzessiv, falls punktweise gilt: $\lim_{\beta\to\infty} \beta U_{\alpha+\beta} f = f$ (für $\alpha \geq o$) . Anstelle o-supermedian (bzw. o-exzessiv) sagen wir supermedian (bzw. exzessiv) (vgl. [5]-II-2.1/2.3/2.17, sowie [21]-§ 5, S.22).

Falls die Resolvente zu einer Halbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$ gehört, so bedeutet α-Supermedianität (α-Exzessivität) in Termen der Halbgruppe: $e^{-\alpha t}P_t f \leq f$ für jedes $t \geq 0$ (bzw. zusätzlich: $\lim_{t\searrow 0} e^{-\alpha t}P_t f = f$ punktweise).

Für $\alpha \geq 0$ bezeichnet $\mathcal{S}^\alpha(U_\alpha)$ (bzw. $\mathcal{E}^\alpha(U_\alpha)$) (kurz: $\mathcal{S}^\alpha, \mathcal{E}^\alpha$) die α-supermedianen (bzw. α-exzessiven) Funktionen bzgl. der Resolvente (U_α) ; ferner $\mathcal{S} := \mathcal{S}^0$, $\mathcal{E} := \mathcal{E}^0$.

Eine Resolvente $(U_\alpha)_{\alpha>0}$ auf einem topologischen Raum mit Borel-σ-Algebra heißt starke Feller-Resolvente (stark Fellersch), falls sie beschränkte meßbare Funktionen in stetige beschränkte abbildet.

$(U_\alpha)_{\alpha>0}$ auf einem kompakten Raum mit Borel-σ-Algebra heißt Feller-Resolvente, falls sie stetige Funktionen in stetige abbildet und für stetige f $\lim_{\alpha\to\infty} \alpha U_\alpha f = f$ ist

0.7 Die Begriffe '(normaler) Markov-Prozeß (mit Übergangshalbgruppe) (und Startmaß)' werden benutzt wie in [5] (vgl. I-§§ 1-5); ein Markov-Prozeß heißt rechtsstetig, falls er rechtsstetige Pfade hat. Die Bezeichnung 'fast sicher' (kurz: f.s.) für Eigenschaften von Prozessen bedeutet jeweils 'P^μ-fast-sicher' für alle Startmaße μ (vgl. [5]-I-5.7).

Eigenschaften über Austritts- und Trefferzeiten, sowie die zugehörigen Kerne, finden sich in [5]-I-§ 10/11; bezüglich des Begriffes 'nahezu (Borel-)meßbar' etc. vergleiche man [5]-I-10.21.

Man sagt, ein Markov-Prozeß besitze ein Referenzmaß, falls die zugehörige Resolvente absolut stetig ist (vgl. 0.6).

Ein Markov-Prozeß heißt transient, falls der zugehörige Potentialkern eigentlich ist (vgl. 0.6).

Kapitel I Rechts-Prozesse und Standard-H-Kegel

§ 1 Ray-Resolventen und Rechts-Prozesse

Die in diesem Paragraphen bereitgestellten Definitionen und Bezeichnungen sind im wesentlichen aus Blumenthal/Getoor [5] und Getoor [21] übernommen.

Die Definition eines Rechts-Prozesses wird gegenüber der in [21] insofern abgeändert, als - wie bei Standard-Prozessen in [5] - zu dem hier als polnisch vorausgesetzten Zustandsraum immer ein 'Friedhof' Δ hinzugefügt ist (vgl. 1.4).

Am Schluß stehen einige Beispiele, die im weiteren jeweils zur Diskussion herangezogen werden.

Es sei zunächst (1.1-1.3) (K,τ) ein kompakter metrischer Raum, versehen mit der σ-Algebra $\mathcal{B}(K)$ der Borel-Mengen in K. $\mathcal{C}$ bezeichne abkürzend die stetigen Funktionen $\mathcal{C}(K)$, $\mathcal{B}$ die Borel-meßbaren $\mathcal{B}(K)$ auf K . Zu einer gegebenen Resolvente auf $(K,\mathcal{B}(K))$ seien $\mathcal{S}^\infty$ (bzw. $\mathcal{E}^\infty$) die Vereinigung aller α-supermedianen (bzw. α-exzessiven) Funktionen (für $\alpha \geq 0$), $\mathcal{S}_c^\infty := \mathcal{S}^\infty \cap \mathcal{C}$, $\mathcal{E}_c := \mathcal{E} \cap \mathcal{C}$.

1.1 Definition:

a) Eine submarkovsche Resolvente $(V_\alpha)_{\alpha>0}$ auf $(K,\mathcal{B}(K))$ heißt Ray-Resolvente, falls gilt:

- $V_\alpha \mathcal{C} \subset \mathcal{C}$ für jedes $\alpha > 0$,
- $\mathcal{S}_c^\infty$ trennt die Punkte von K ;

starke Ray-Resolvente, falls gilt:

- $V_\alpha \mathcal{B}_b \subset \mathcal{C}$ für jedes $\alpha > 0$,
- $\mathcal{E}_c$ trennt die Punkte von K .

b) $x \in K$ heißt Nicht-Branch-Punkt einer Ray-Resolvente $(V_\alpha)_{\alpha>0}$ auf $(K,\mathcal{B}(K))$, falls für jedes $f \in \mathcal{C}$ gilt:
$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha V_\alpha f(x) = f(x)$.

c) Die Menge der Nicht-Branch-Punkte in K (für eine fest

vorgegebene Ray-Resolvente) werde mit D bezeichnet. Punkte $x \in B := K \setminus D$ heißen Branch-Punkte (für die Resolvente).

1.2 Bemerkungen (zur Ray-Halbgruppe):

1.) Nach dem Theorem von Ray (vgl. [21]-Th.3.6) existiert zu einer Ray-Resolvente $(V_\alpha)_{\alpha>0}$ auf $(K,\mathcal{L}(K))$ eine eindeutige Halbgruppe ('Ray-Halbgruppe') $(Q_t)_{t\geq 0}$, deren zugehörige Resolvente $(V_\alpha)_{\alpha>0}$ ist.

2.) Es ist $x \in D$ genau dann, wenn $Q_0(x,\cdot) = \varepsilon_x$ ist. Ferner ist $Q_0 f = f$ für $f \in \mathcal{E}^\infty$ (vgl. [21]-5.6/5.8).

3.) Alle Maße $Q_t(x,\cdot)$ und $V_\alpha(x,\cdot)$ (für $t\geq 0$, $\alpha>0$, $x \in K$) werden von D getragen. D ist G_δ-Menge, speziell ist $(D,\tau|_D)$ polnisch (vgl. [21]-3.17).

4.) (Q_t) ist markovsch genau dann, wenn (V_α) markovsch ist. Durch Hinzufügen eines isolierten Punktes $\Delta \notin K$ zu K und geeigneter Fortsetzung von Resolvente (bzw. Halbgruppe) auf $K_\Delta := K \cup \{\Delta\}$ läßt sich der submarkovsche stets auf den markovschen Fall zurückführen (vgl. [21]-S.16).

1.3 Bemerkungen (zum Ray-Prozeß):

Es sei $(Q_t)_{t\geq 0}$ eine markovsche Ray-Halbgruppe auf $(K,\mathcal{L}(K))$; dann gilt mit den Bezeichnungen aus (1.2):

1.) Nach [21]-Th.5.1 existiert zu jedem $\mu \in \mathcal{M}_1^+(K)$ ein Maß $P^\mu \in \mathcal{M}_1^+(W,\mathcal{G}^0)$ auf dem Raum $W := \{w : \mathbb{R}^+ \longrightarrow D \mid w$ rechtsstetig auf $\mathbb{R}_+$ mit Linkslimiten auf $(0,\infty)\}$, versehen mit den von den Abbildungen $Y_t : w \longmapsto w(t)$ erzeugten σ-Algebren $\mathcal{G}^0 := \sigma(\{Y_t \mid t \geq 0\})$, bzw. $\mathcal{G}_t^0 := \sigma(\{Y_s \mid s \leq t\})$, so daß $(W,\mathcal{G}^0,\mathcal{G}_t^0,Y_t,\theta_t,P^\mu)$ ein Markov-Prozeß mit Übergangs-Halbgruppe $(Q_t)_{t\geq 0}$ und Startmaß μQ_0 auf $(K,\mathcal{L}(K))$ ist; dieser heißt Ray-Prozeß.

2.) $(W,\mathcal{G}^0,\mathcal{G}_t^0,Y_t,\theta_t,(P^x)_{x\in D})$ ist ein rechtsstetiger Markov-Prozeß mit Übergangshalbgruppe $(Q_t)_{t\geq 0}$ in $(D,\mathcal{L}(D))$.

Ist f α-exzessiv, so ist f nahezu Borelsch und $t \longmapsto f \circ Y_t$ ist f.s. rechtsstetig auf $\mathbb{R}_+$ mit Linkslimiten in (o,∞) (vgl. [21]-Th.5.8).

Die Nicht-Branch-Punkte von markovschen Ray-Resolventen bilden den Zustandsraum von Rechts-Prozessen, die im folgenden definiert werden:

1.4 Definition:

a) Es sei $(E,\mathcal{E})$ ein Meßraum, $X := (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ ein normaler Markov-Prozeß mit Zustandsraum $(E,\mathcal{E})$ (ergänzt durch einen absorbierenden Punkt $\Delta \notin E$) im Sinne von [5]-I-3.1; dabei seien $\mathcal{F}$ (bzw. $\mathcal{F}_t$) die von der Familie $(X_t)_{t\geq o}$ (bzw. $\{X_s \mid s \leq t\}$) in Ω erzeugten und in der üblichen Weise vervollständigten σ-Algebren (vgl. [21]-S.51f).

Überdies gelte:

- $E_\Delta = E \cup \{\Delta\}$ sei ein polnischer Raum mit einer Topologie τ_Δ, und $\mathcal{E}_\Delta := \sigma(\mathcal{E}, \{\Delta\})$ sei die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(E_\Delta, \tau_\Delta)$,
- Ω sei die Menge aller rechtsstetigen Abbildungen $\omega : \overline{\mathbb{R}}_+ \longrightarrow E_\Delta$,
- $(N_t)_{t\geq o}$ sei eine markovsche Halbgruppe auf $(E_\Delta, \mathcal{B}^u(E_\Delta))$, und $(P_t)_{t\geq o}$ bezeichne die Einschränkung von (N_t) auf E,
- für jede (P_t)-exzessive Funktion f auf E und für jedes $\mu \in \mathcal{M}_1^+(E)$ sei die Abbildung $t \longmapsto f \circ X_t$ P^μ-f.s. rechtsstetig auf $\mathbb{R}_+$.

Dann heiße X Rechts-Prozeß mit Übergangshalbgruppe $(P_t)_{t\geq o}$ auf $(E, \mathcal{B}^u(E))$.

b) Ist überdies $(P_t)_{t\geq o}$ sogar eine Borel-meßbare Halbgruppe auf $(E,\mathcal{B}(E))$, so heißt X Borel-Rechts-Prozeß auf $(E,\mathcal{B}(E))$.

1.5 Bemerkungen (zu Rechts-Prozessen):

1.) Für die α-exzessiven Funktionen $\mathcal{E}^\alpha(P_t)$ von $(P_t)_{t\geq o}$ (bzw. $\mathcal{E}^\alpha(N_t)$ von $(N_t)_{t\geq o}$) gilt:

$\mathcal{E}^{\alpha}(P_t) = \mathcal{E}^{\alpha}(N_t)|_E = \{f|_E \mid f \in \mathcal{E}^{\alpha}(N_t) \ , \ f(\Delta) = 0\}$,
was mit der Markov-Eigenschaft und der Rechtsstetigkeit der Pfade folgt. Daraus ergibt sich, daß X aus (1.4) im Sinne von Getoor [21]-§ 9 ein 'Rechts-Prozeß' mit markovscher Halbgruppe $(N_t)_{t\geq 0}$ auf $(E_\Delta, \mathcal{B}^u(E_\Delta))$ ist.

2.) Rechts-Prozesse sind starke Markov-Prozesse (vgl. [21]-9.4).

3.) Aus der geforderten Rechtsstetigkeit der Pfade folgt mit der Markov-Eigenschaft, daß der Initialkern der Halbgruppe die Identität (als Operator auf $\mathcal{B}_b^u(E_\Delta)$) liefert (vgl. [21]-S.51).

4.) Die Kegel $\mathcal{E}^{\alpha}(P_t)$ und $\mathcal{E}^{\alpha}(N_t)$ sind stabil gegen punktweise Infima (für $\alpha \geq 0$). (vgl. [21]-10.2).

5.) Die Einschränkung des Ray-Prozesses aus (1.3) auf die Nicht-Branch-Punkt-Menge D liefert nach Vervollständigung der σ-Algebren einen Borel-Rechts-Prozeß auf D (vgl. 1.3.2).

Der Zusammenhang von Ray-Resolventen und Rechts-Prozessen ergibt sich über (1.5.5) hinaus aus der Existenz der Ray-Kompaktifizierung:

1.6 Bemerkung (zur Ray-Knight-Kompaktifizierung):

Ist X ein Rechts-Prozeß auf $(E, \mathcal{B}^u(E))$, so existieren gemäß [21]-§§ 10/11 ein in gewissem Sinne 'minimaler' kompakter Raum (K,τ), in den E_Δ τ-dicht eingebettet wird, und eine Ray-Resolvente und -Halbgruppe auf K, die Resolvente und Halbgruppe von X fortsetzen, so daß E_Δ enthalten ist in den Nicht-Branch-Punkten.

(K,τ) heißt Ray-(Knight-)Kompaktifizierung von E_Δ und $\tau|_E$ die zugehörige Ray-Topologie.

Wir werden uns in Kapitel III für spezielle Rechts-Prozesse, nämlich für Ray-Prozesse auf den Nicht-Branch-Punkten von Ray-Resolventen, interessieren. Gemäß (1.6) entspricht jedem beliebigen Rechts-Prozeß bis auf eine 'Sättigung' des Zustandsraumes (Übergang von E_Δ zu D) und eine Topologie-

Änderung (Übergang zur Ray-Topologie) ein solcher Ray-Prozeß.

Speziellere Klassen Markovscher Prozesse - wie sie in Blumenthal/Getoor [5] oder Meyer [30] untersucht werden - unterscheiden sich von den Rechts-Prozessen zuerst durch zusätzliche Linksregularitäten.

1.7 Definition:

Es sei $X = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \vartheta_t, P^x)$ ein Rechts-Prozeß auf $(E, \mathcal{E}^u(E))$.

a) Es bezeichnet $\zeta(\omega) := \inf\{t \geq 0 \mid X_t(\omega) = \Delta\}$ die Lebenszeit des Prozesses. Diese ist gemäß [21]-S.81 $(\mathcal{F}_t)$-Stopzeit .

b) X heißt quasilinksstetig auf $[0,\zeta)$, falls für jede Folge von $(\mathcal{F}_t)$-Stopzeiten T_n mit $T := \sup T_n$ gilt: $X_{T_n} \longrightarrow X_T$ f.s. auf $\{T < \zeta\}$.

c) X heißt quasilinksstetig, falls analog X quasilinksstetig auf $[0,\infty)$ ist.

Die Begriffe Standard bzw. Hunt-Prozeß werden wie bei Blumenthal/Getoor (vgl. [5]-I-9.2) verwendet; damit ist ein Hunt-Prozeß (bzw. Standard-Prozeß) ein quasilinksstetiger (bzw. ein auf $[0,\zeta)$ quasilinksstetiger) Borel-Rechts-Prozeß auf kompaktem metrischem E_Δ . Speziell sind die Pfade dieser Prozesse rechtsstetig auf $[0,\infty)$ und besitzen (f.s.) Linkslimiten in E auf $[0,\zeta)$ (bzw. auf $[0,\infty)$) (vgl. [5]-9.2f/9.15).

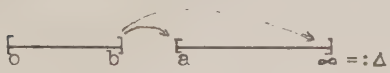
Nachfolgend sind einige Beispiele für Ray-Prozesse aufgeführt. Diese werden beschrieben durch Angabe von (K,τ) , durch Angabe ihres Verhaltens auf den Nicht-Branch-Punkten D , sowie Angabe des Initialkernes $Q_0(\cdot,\cdot)$ der Ray-Halbgruppe in den Branch-Punkten.

$\mathbb{R} \cup \{\Delta\}$, bzw. $\mathbb{R}^2 \cup \{\Delta\}$ seien die Ein-Punkt-Kompaktifizierungen von $\mathbb{R}$, bzw. $\mathbb{R}^2$. Teilmengen hierin seien jeweils mit den Relativ-Topologien versehen.

1.8 Beispiele:

1.) Prozeß der 'gleichförmigen Bewegung nach rechts' auf $[o,b] \cup [a,\infty]$ $(o < b < a < \infty)$, der unmittelbar vor Erreichen von b mit Wahrscheinlichkeit 1/2 jeweils nach a bzw. nach $\Delta := \infty$ springt.

Für den Branch-Punkt b sei $Q_o(b,\cdot) = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_\Delta)$,



(vgl. [21]-10.12-(v)).

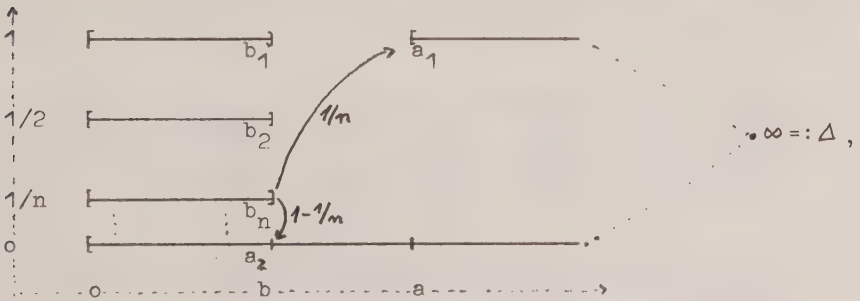
2.) Prozeß der 'gleichförmigen Bewegung nach rechts' auf der 'Gabel'

der unmittelbar vor Erreichen von b nach a_1 bzw. a_2 springt, jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/2 .

Für den Branch-Punkt b sei $Q_o(b,\cdot) = \frac{1}{2}(\varepsilon_{a_1} + \varepsilon_{a_2})$

(vgl. [21]-10.12-(iv)) .

3.) Prozeß der 'gleichförmigen Parallel-Bewegung nach rechts' auf einer Folge sich häufender Geraden in $\mathbb{R}^2$,



wobei für $n \in \mathbb{N}$ auf der n-ten Geraden unmittelbar vor Erreichen von b_n ein Sprung mit Wahrscheinlichkeit 1/n nach a_1 und (1 - 1/n) nach a_2 erfolgt.

Dabei seien für $i \in \mathbb{N}$: $b_i := (b,1/i)$, $a_1 := (a,1)$, $b_\infty := (b,o) =: a_2$.

Für die Branch-Punkte $\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sei
$Q_o(b_n, \cdot) = \frac{1}{n} \varepsilon_{a_1} + (1 - \frac{1}{n}) \varepsilon_{a_2}$.

4.) 'Geburts- und Todes-Prozeß' auf $\overline{\mathbb{N}}_o := \mathbb{N}_o \cup \{\infty\}$ (als Ein-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{N}_o$) mit Reflexion in o ; d.h.: Sprung-Prozeß auf $\overline{\mathbb{N}}_o$ mit Sprungintensitäten λ_n (so daß $o < \lambda_n < \infty$ ist für $n \in \mathbb{N}_o$ und $\lambda_\infty = \infty$) und Sprungmaßen $M(n, \cdot)$ für $n \in \mathbb{N}_o$, wobei gilt:

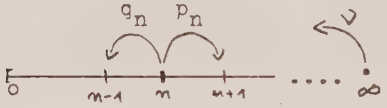
(i) $M(o,1) =: p_o = 1$;

(ii) $M(n,n+1) =: p_n > o$, $M(n,n-1) =: q_n > o$
mit $p_n + q_n = 1$ $(n \in \mathbb{N})$;

(iii) $\alpha := \sum_{k \geq o} \sum_{n > k} \frac{1}{\lambda_k} \frac{q_{k+1} \cdot \ldots \cdot q_n}{p_k \cdot \ldots \cdot p_n} < \infty$;

(iv) unmittelbar vor der Zeit T des Erreichens von ∞ Sprung zurück nach $\mathbb{N}_o$ gemäß eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\nu := \sum_{n \in \mathbb{N}_o} a_n \varepsilon_n$;

(v) ∞ ist einziger Branch-Punkt mit $Q_o(\infty, \cdot) = \nu$.



Bedingung (iii) impliziert, daß T f.s. endlich ist und die Pfade vor T f.s. gegen den Alexandroff-Punkt ∞ konvergieren (vgl. Dynkin/Juschkewitsch [17]-Kap. IV). Daher macht die Bedingung (iv) Sinn.

Daß es sich bei diesem Prozeß um einen Ray-Prozeß handelt, die zugehörige Resolvente $(V_\alpha)_{\alpha > o}$ sogar eine starke Ray-Resolvente ist, sieht man an der Beziehung
$V_\alpha f(x) = E^x(\int_o^T e^{-\alpha t} f \circ X_t \, dt) + V_\alpha f(\infty) \cdot E^x(e^{-\alpha T})$, welche mittels der Abschätzung
$|V_\alpha f(x) - V_\alpha f(\infty)| \leq (c + \alpha |V_\alpha f(\infty)|) \cdot E^x(T)$ für
$f \in \mathcal{B}_b(\overline{\mathbb{N}}_o)$ mit $|f| \leq c$ wegen $E^x(T) \xrightarrow{x \to \infty} o$ liefert:

V_α bildet die beschränkten meßbaren Funktionen auf $\overline{\mathbb{N}}_o$ in die stetigen ab (vgl. [17]-IV-§ 11).

5.) Spezielle zeitgeänderte Standard-Prozesse

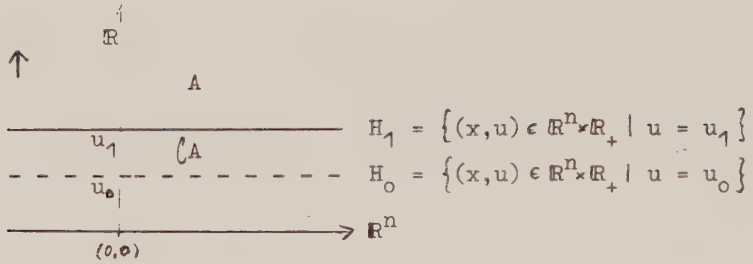
Es sei $(Z_t)_{t\geq o}$ ein transienter Standard-Prozeß mit Resolvente $(U_\alpha)_{\alpha\geq o}$ auf einem Zustandsraum $(E,\mathcal{E}(E))$. Für eine meßbare Menge A ist dann $A_t := \int_o^t 1_A \circ Z_s \, 1_{[o,\zeta)}(s)ds$ ein stetiges additives Funktional (vgl. [5]-IV-1.6). Der gemäß (A_t) zeitgeänderte Prozeß $(Z_{\tau_t})_{t\geq o}$ (wobei $\tau_t := \inf\{s \geq o \mid A_s > t\}$) ist nach [5]-V-2.11 ein rechtsstetiger starker Markov-Prozeß auf $(E,\mathcal{E}^u)$ mit Resolvente $(U'_\alpha)_{\alpha\geq o}$, wo $U'_\alpha f(x) := E^x(\int_o^\infty e^{-\alpha A_t} f\circ Z_t \, dA_t)$ ist.

D.h. der Potentialkern U'_o geht aus U_o wie folgt hervor: $U'_o f(x) = U_o(1_A \cdot f)(x)$.

Aus [5]-V-1.22/2.11/3.1-3.6/3.33 entnimmt man weiter: Der Träger und der feine Träger von (A_t) stimmen überein; sie seien mit $S_f(A)$ bezeichnet. Der Initialkern der Übergangshalbgruppe $(P'_t)_{t\geq o}$ des zeitgeänderten Prozesses ergibt sich als $P'_o f(x) = E^x(f\circ Z_T)$, wobei $T := \inf\{t > o \mid Z_t \in S_f(A)\}$ die Trefferzeit von $S_f(A)$ ist; daher sind genau die $x \in E_\Delta \setminus S_f(A)$ Branch-Punkte von $(Z_{\tau_t})_t$ mit Branch-Verteilung $Z_T(P^x)$. Der auf $S_f(A)$ eingeschränkte Prozeß $(Z_{\tau_t})_t$ ist ein Rechts-Prozeß: er ist Borel-Rechts-Prozeß, falls $(Z_t)_t$ ein Referenzmaß besitzt, und Standard-Prozeß, falls überdies $S_f(A)$ abgeschlossen ist in E_Δ (vgl. [5]-S.233).

Anschaulich beschreibt der zeitgeänderte Prozeß das Verhalten des Ausgangs-Prozesses, während er sich in der Menge $S_f(A)$ aufhält.

a) Es sei $(Z_t)_{t\geq o}$ der Raum-Zeit-Prozeß der Brownschen Bewegung im $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+$ und $A := \{(x,u) \in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+ \mid u \notin [u_o,u_1)\}$ für vorgegebene $u_o,u_1 \in \mathbb{R}_+$ mit $o < u_o < u_1 < \infty$.



Dann ist der gemäß $A_t := \int_0^t 1_A \circ Z_s \cdot 1_{[0,\zeta)}(s)ds$ zeitgeänderte Prozeß $(Z_{\tau_t})_{t\geq 0}$ auf $S_f(A) = A$ ein Borel-Rechts-Prozeß; eine Ray-Kompaktifizierung ist die Ein-Punkt-Kompaktifizierung K von $A \cup \{(x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mid u = u_o\}$ mit Branch-Verteilung:

$$P'_o((x,u_o),d(y,u)) = (2\pi(u_1-u_o))^{-n/2} \exp\left\{\frac{(y-x)^2}{2(u_1-u_o)}\right\} d\varepsilon_{u_1}(u)dy .$$

Man erhält also einen Ray-Prozeß auf K mit einer sogar starken Ray-Resolvente.

b) Ist $(Z_t)_{t\geq 0}$ der Prozeß der Brownschen Bewegung im $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) und A eine abgeschlossene Kugel im $\mathbb{R}^n$, so ist der gemäß (A_t) zeitgeänderte Prozeß auf $S_f(A) = A$ (kompakt) standard mit starker Feller-Resolvente.

§ 2 Exzessive Funktionen bei Rechts-Prozessen

Es wird zunächst der Satz von Hunt für Rechts-Prozesse zitiert, der eine Beschreibung der Austrittsverteilungen des Prozesses in Termen des Kegels der exzessiven Funktionen liefert. Er wird in § 3 zur Identifizierung von gefegten Maßen mit Trefferverteilungen herangezogen.

Anschließend werden Charakterisierungen der exzessiven Funktionen hergeleitet, die eine geeignete Lokalisierung zulassen. Dabei werden Ergebnisse von Mertens über stark supermediane Funktionen verwendet.

Sei dazu im folgenden $X := (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \Theta_t, P^x)$ ein Rechts-Prozeß mit Halbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$, zugehöriger Resolvente $(U_\alpha)_{\alpha \geq 0}$ mit Potentialkern U_0 auf $(E, \mathcal{B}^u(E))$ (vgl. 1.4). Bezeichne ferner σ die Einschränkung $\sigma_{\Delta|E}$ der Ausgangstopologie σ_Δ auf E und $\mathcal{B}^n(E)$ die σ-Algebra der nahezu-$\mathcal{B}(E,\sigma)$-meßbaren Mengen in $\mathcal{B}^u(E)$, entsprechend $\mathcal{B}^n(E)$ die nahezu-$\mathcal{B}(E,\sigma)$-meßbaren Funktionen auf E.

Sei ζ wie in (1.7) die Lebenszeit des Prozesses. Alle auftretenden Funktionen auf E seien auf E_Δ durch Null in Δ fortgesetzt (analog wie in [5]).

Betrachtet werden im folgenden nur die (P_t)-κ-supermedianen (bzw.-α-exzessiven) Funktionen. Es bezeichne daher für $\alpha \geq 0$: $\mathcal{S}^\alpha := \mathcal{S}^\alpha(P_t)$ und $\mathcal{E}^\alpha := \mathcal{E}^\alpha(P_t)$, bzw. $\mathcal{S} := \mathcal{S}^0$ und $\mathcal{E} := \mathcal{E}^0$.

Ab (2.8) wird zusätzlich vorausgesetzt, daß alle exzessiven Funktionen nahezu Borelsch sind (d.h. in $\mathcal{B}^n(E)$). Im übrigen werden die Bezeichnungen aus § 1 übernommen.

Zu den aus Blumenthal/Getoor [5] zitierten Aussagen ist zu bemerken, daß sie auch im Rechts-Prozeß-Kontext, in der Regel mit wörtlicher Übertragung der Beweise, gültig bleiben.

2.1 Definition: Es sei $A \in \mathcal{B}^u(E_\Delta)$.

a) Die $(\mathcal{F}_t)$-Stopzeiten (vgl. [21]-S.80f) D_A bzw. T_A sind

definiert durch: $D_A(\omega) := \inf\{t \geq o \mid X_t(\omega) \in A\}$

bzw. $T_A(\omega) := \inf\{t > o \mid X_t(\omega) \in A\}$ für $\omega \in \Omega$.

Ferner seien für $\alpha \geq o$ P_A^α bzw. Π_A^α definiert durch:

$$P_A^\alpha f(x) := E^x(e^{-\alpha T_A} f \circ X_{T_A} \,,\; T_A < \zeta)$$

bzw. $$\Pi_A^\alpha f(x) := E^x(e^{-\alpha D_A} f \circ X_{D_A} \,,\; D_A < \zeta) \,.$$

Im Falle $\alpha = o$ heißen $P_A := P_A^o$ der Trefferkern für A,

bzw. $\Pi_A := \Pi_A^o$ der Austrittskern aus A und die zugehörigen Maße die Treffer- bzw. Austrittsverteilungen.

b) $x \in E$ heißt regulär für A, falls $P^x(T_A = o) = 1$ ist, sonst irregulär für A. A^r (bzw. A^i) bezeichne die Menge der für A regulären (bzw. irregulären) Punkte.

c) Für $f \in \mathcal{B}^u(E)$ und $\alpha \geq o$ sei

$f_A^{(\alpha)} := \inf\{u \in \mathcal{E}^\alpha \mid u \geq f$ auf $A\}$ die α-Reduzierte (bzw. im Falle $\alpha = o$ $f_A := f_A^{(o)}$ die Reduzierte) von f über A .

Die Definition von Π_A (nicht analog zu P_A) erweist sich als sinnvoll in den Fällen, wo Austrittsverteilungen betrachtet werden.

Die Gültigkeit des folgenden Satzes von Hunt wird bei Getoor (vgl. [21]-12.9) für die dort definierten Rechts-Prozesse behauptet. Er gilt in unserem Kontext ebenfalls, weil mit dem Theorem von Shih für Rechts-Prozesse (vgl. [21]-12.10) der Beweis wie in([5]-III-6.12) verläuft und dort für die Aussage nur benötigt wird, daß der Potentialkern U_o (der bzgl. des multiplikativen Funktionals $M_t = 1_{[o,\zeta)}(t)$ subordinierten Halbgruppe (P_t)) eigentlich ist.

2.2 Satz (Hunt):

Sind $f \in \mathcal{E}^\alpha$ und $A \in \mathcal{L}^n(E)$, dann ist $P_A^\alpha f \leq f_A^{(\alpha)}$, und falls $\alpha > o$ ist, gilt für alle $x \in E \setminus (A \setminus A^r)$:

(*) $\quad P_A^\alpha f(x) = f_A^{(\alpha)}(x)$.

Falls $\alpha = o$ ist, bleibt (*) wahr, sofern U_o eigentlich ist. □

2.3 Folgerung: Für $f \in \mathcal{E}^\alpha$, $A \in \mathcal{L}^n(E)$, $\alpha > o$ gilt:

(i) $f_A^{(\alpha)} = \prod_{\complement A}^\alpha f \geq P_A^\alpha f$ und

(ii) $\hat{f}_A^{(\alpha)} = P_A^\alpha f$.

Ist $\alpha = o$, so bleiben die Aussagen wahr, sofern U_o eigentlich. Dabei ist für $g \in \mathcal{S}^\alpha$: $\hat{g} := \sup_\beta \beta U_{\alpha+\beta} g$ die 'α-exzessive Regularisierung' von g.

Beweis:

(i) : Es ist $\prod_{\complement A}^\alpha f \geq P_A^\alpha f$, denn:

für $x \in \complement A$: $D_A = T_A$ P^x-f.s. ([5]-I-10.2)

und für $x \in A$: $\prod_{\complement A}^\alpha(x, \cdot) = \varepsilon_x$, also mit [5]-II-2.8 :

$P_A^\alpha f(x) \leq f(x) = \prod_{\complement A}^\alpha f(x)$.

Ferner ist $f_A^{(\alpha)} \geq \prod_{\complement A}^\alpha f$,

denn für $u \in \mathcal{E}^\alpha$, $u \geq f$ auf A ist $u \geq \prod_{\complement A}^\alpha u \geq \prod_{\complement A}^\alpha f$.

Nun gilt auf A: $f_A^{(\alpha)} = f = \prod_{\complement A}^\alpha f \geq P_A f$,

auf $\complement A = E \setminus A \subset E \setminus (A \setminus A^r)$ mit (2.2): $f_A^{(\alpha)} = P_A^\alpha f \leq \prod_{\complement A}^\alpha f = f_A^{(\alpha)}$.

(ii): Es ist nach [5]-II-2.8 : $P_A^\alpha f \in \mathcal{E}^\alpha$; ferner definitionsgemäß $\hat{f}_A^{(\alpha)} \in \mathcal{E}^\alpha$, also $f_A^{(\alpha)} \geq \hat{f}_A^{(\alpha)} \geq P_A^\alpha f$, woraus mit (2.2) folgt, daß die Menge $\{ \hat{f}_A^{(\alpha)} > P_A^\alpha f \}$ enthalten ist in der semipolaren Menge $A \setminus A^r$. Mit [5]-II-3.2 ergibt sich (ii). □

Nachfolgend werden Eigenschaften exzessiver Funktionen bereitgestellt und hinreichende Bedingungen angegeben dafür, daß supermediane Funktionen schon exzessiv sind. Dazu wird eine Beschreibung von Nicht-Wartepunkten benötigt:

2.4 Definition:

Ein Punkt $x \in E$, für den $P^x(T_{\complement\{x\}} = o) = o$ ist, heißt Wartepunkt (für den Rechts-Prozeß), sonst Nicht-Wartepunkt.

2.5 Lemma: Für $x \in E$ ist äquivalent:

(i) x ist Nicht-Wartepunkt;

(ii) $P^x(T_{\complement\{x\}} = o) = 1$;

(iii) für jede gegen $\{x\}$ absteigende Folge $\mathfrak{U}^u$-meßbarer Mengen B_n ist $P^x(T_{\complement B_n \downarrow o}) = 1$;

(iv) es existiert eine gegen $\{x\}$ absteigende Folge $\mathfrak{T}$-offener Mengen U_n mit $P^x(T_{\complement U_n \downarrow o}) = 1$;

(v) es existiert eine gegen $\{x\}$ absteigende Folge $\mathfrak{U}^u$-meßbarer Mengen B_n mit $P^x(T_{\complement B_n \downarrow o}) = 1$.

Beweis:

'(i) $\Rightarrow$ (ii)' nach dem Null-Eins-Gesetz ([5]-I-5.17);

'(ii) $\Rightarrow$ (iii)': nach [5]-I-10.4 gilt für $B_n \downarrow \{x\}$: $T_{\complement B_n} \downarrow T_{\complement\{x\}}$, weswegen
$1 \geq P^x(T_{\complement B_n \downarrow o}) = P^x(T_{\complement\{x\}} = o) = 1$ ist;

'(iii) $\Rightarrow$ (iv)': da $(E,\mathfrak{T})$ metrisierbar ist, existiert für x eine abzählbare Umgebungsbasis offener Mengen U_n mit $(U_n) \downarrow \{x\}$;

'(iv) $\Rightarrow$ (v)': insbesondere;

'(v) $\Rightarrow$ (i)': für die Folge (B_n) ist $T_{\complement B_n} \geq T_{\complement\{x\}} \geq o$,
also $1 \geq P^x(T_{\complement\{x\}} = o) \geq P^x(T_{\complement B_n \downarrow o}) = 1$.

□

2.6 Lemma: Für $f \in \mathcal{E}$ gilt:

a) $\Pi_B f \leq f$ für jedes $B \in \mathfrak{U}^u(E)$;

b) für jeden Nicht-Wartepunkt $x \in E$ und jede gegen $\{x\}$ absteigende Folge $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{U}^u(E)$ ist $\lim_n \Pi_{B_n} f(x) = f(x)$.

Beweis:

a) nach [5]-II-2.8 ;

b) nach Definition des Rechts-Prozesses konvergiert (wegen 2.5) P^x-f.s. $f \circ X_{T_{\complement B_n}}$ gegen $f \circ X_o$; also ist für $f \in \mathcal{E}$ und $x \in E$ Nicht-Wartepunkt:

$$f(x) \geq \overline{\lim_n} \Pi_{B_n} f(x) \underset{(2.3)}{\geq} \lim_n P_{\complement B_n} f(x) \underset{\text{Fatou}}{\geq} E^x(\lim_n f \circ X_{T_{\complement B_n}}) = f(x) \ .$$ □

2.7 Lemma:

Es sei $f \in \mathcal{F}$, dann ist $f \in \mathcal{E}$, wenn eine der nachstehenden Bedingungen erfüllt ist:

a) Für $x \in E$ ist die Abbildung $t \longmapsto f \circ X_t$ P^x-f.s. rechtsseitig unterhalbstetig in $t=o$.

b) Für jeden Nicht-Wartepunkt $x \in E$ existiert eine gegen $\{x\}$ absteigende Folge $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{U}(E)$ mit:

(i) $P^x(D_{\complement B_n} > o) = 1$ und $\Pi_{B_n} f \in \mathcal{F}$ für $n \in \mathbb{N}$

(ii) $\lim_n \Pi_{B_n} f(x) = f(x)$.

Beweis:

a) Es ist $f(x) \geq \overline{\lim_{t \searrow o}} P_t f(x) \geq \lim_{t \searrow o} P_t f(x) \geq$

$$\underset{\text{Fatou}}{\geq} E^x(\lim_{t \searrow o} f \circ X_t) \underset{a)}{\geq} E^x(f \circ X_o) = f(x) \ .$$

b) Es sei $x \in E$ Nicht-Wartepunkt und $(B_n) \downarrow \{x\}$ wie vorausgesetzt, dann gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \overline{\lim_{t \searrow o}} P_t f(x) \geq \lim_{t \searrow o} P_t f(x) \underset{(i)}{\geq} \lim_{t \searrow o} P_t \Pi_{B_n} f(x) \geq \\ &\geq \lim_{t \searrow o} E^x(E^{X_t}(f \circ X_{D_{\complement B_n}}, \ D_{\complement B_n} < \infty) \ , \ t < D_{\complement B_n}) = \\ &= \lim_{t \searrow o} E^x(f \circ X_{D_{\complement B_n}} \circ \theta_t \ , \ D_{\complement B_n} \circ \theta_t < \infty, \ t < D_{\complement B_n}) = \\ &= \lim_{t \searrow o} E^x(f \circ X_{D_{\complement B_n}}, \ t < D_{\complement B_n} < \infty) \underset{(i)}{=} E^x(f \circ X_{D_{\complement B_n}}, \ D_{\complement B_n} < \infty) = \\ &= \Pi_{B_n} f(x) \ . \end{aligned}$$

Also folgt mit (ii) $\lim P_t f(x) = f(x)$.

Ist $x \in E$ Wartepunkt, so steigt

$\Omega_n := \{\omega \in \Omega \mid X_t(\omega) = X_0(\omega) \text{ für } t < \frac{1}{n}\}$ auf in n mit

$$P^x(\bigcup_n \Omega_n) = 1 .$$

Ist nun $f \in \mathcal{S}_b$, so ist für $t_n < \frac{1}{n}$ (für $n \in \mathbb{N}$) :

$$E^x(f \circ X_{t_n}) = E^x(f \circ X_{t_n}, \Omega_n) + E^x(f \circ X_{t_n}, \complement\Omega_n) =$$

$$= f(x) \cdot P^x(\Omega_n) + E^x(f \circ X_{t_n}, \complement\Omega_n) \xrightarrow{n \to \infty} f(x) ;$$

für $f \in \mathcal{S}$ steigt $P_t(\inf(f,n))(x)$ in n und t auf,

woraus $\lim_{t \searrow 0} P_t f(x) = f(x)$ folgt. □

Zur Charakterisierung von Exzessivität spielt der Kegel der stark supermedianen Funktionen eine Rolle. Es sei von dem Rechts-Prozeß X zusätzlich vorausgesetzt, daß α-exzessive Funktionen nahezu Borelsch sind (d.h. $\mathcal{E}^\alpha \subset \mathcal{B}^n(E)$ für $\alpha \geq 0$). Dann sind die Voraussetzungen von Mertens [28] (vgl. S.121) erfüllt.

Z.B. genügen Standard-Prozesse dieser Voraussetzung (vgl. [5]-II-2.12) und ebenso (vgl. 1.3.2) Ray-Prozesse auf den Nicht-Branch-Punkten.

2.8 Definition:

Eine positive numerische Funktion $f \in \mathcal{B}^n(E)$ heißt stark supermedian (für X auf E), falls für alle kompakten Mengen $L \subset E$ und alle $x \in E \setminus L$ gilt: $f(x) \geq P_L f(x)$.

Es bezeichne $\mathcal{S}^*$ den Kegel der stark supermedianen Funktionen für X .

Mertens hat in [28]-Th.3.1 diesen Begriff eingeführt und gleichzeitig die folgende Äquivalenz gezeigt:

2.9 Satz (Mertens):

Eine Funktion $f \in \mathcal{B}_+^n(E)$ ist stark supermedian genau dann, wenn für jeden rechtsstetigen Markov-Prozeß $(Z_t, \mathcal{A}_t, P)$ mit Übergangshalbgruppe (P_t) und rechtsstetiger Familie

$(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$ und je zwei $(\mathcal{A}_t)$-Stopzeiten S, T mit $S \leq T$ P-f.s. gilt:

$$f \circ Z_S \geq E(f \cdot Z_T | \mathcal{A}_S) \ .$$ □

2.10 Folgerungen:

1.) Jede stark supermediane Funktion ist supermedian.

2.) Für Mengen $U_1, U_2 \in \mathcal{L}^n(E)$ mit $U_1 \subset U_2$ und für $f \in \mathcal{S}^*$ ist $T_{U_1} f \geq T_{U_2} f$.

3.) Ist $\mathcal{U}(E)$ ein System nahezu meßbarer Mengen in E, das das Komplement jeder kompakten Menge in E enthält, so ist $\mathcal{S}^* = \mathcal{V}$ für den Funktionenkegel

$$\mathcal{V} := \{ f \in \mathcal{B}_+^n(E) \mid T_U f \leq f \text{ für } U \in \mathcal{U}(E) \} \ .$$ □

2.11 Bemerkung:

Nach [28]-Cor.-S.129 ist $\mathcal{S}^*$ inf-stabil, ferner ist $1 \in \mathcal{S}^*$, folglich ist jedes $f \in \mathcal{S}^*$ Supremum einer aufsteigenden Folge beschränkter stark supermedianer Funktionen.

Die Voraussetzung an $\mathcal{U}(E)$ in (2.10.3) kann man wie folgt abschwächen:

2.12 Satz:

Es habe E eine Ausschöpfung $E = \bigcup_n B_n$ mit einer aufsteigenden Folge $(B_n) \uparrow \subset \mathcal{L}^n(E)$, und es sei $\mathcal{U}(E)$ ein System in $\mathcal{L}^n(E)$ derart, daß gilt:

(1) Für $n \in \mathbb{N}$ und alle aufsteigenden Folgen von Stopzeiten T_k gilt mit $T := \sup_k T_k$ auf $\{T < \zeta\}$:

$X_T(\omega) \in B_n \Rightarrow (X_{T_k}(\omega)) \subset B_{n+1}$ schließlich (für fast alle ω):

(2) für jede kompakte Menge $L \subset E$ sei $(E \setminus L) \cap B_n \in \mathcal{U}(E)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist für: $f \in \mathcal{B}_+^n(E)$: $f \in \mathcal{S}^* \iff T_U f \leq f$ für alle $U \in \mathcal{U}(E)$.

Beweis:

'$\Rightarrow$' klar nach (2.9).

'$\Leftarrow$': Ist $L \subset E$ kompakt, $U := E \setminus L$, $U_n := U \cap B_n$, so steigt (U_n) auf gegen U und $(D_{\ell U_n})$ gegen

$$T := \sup_n D_{\ell U_n} \leq D_{\ell U} .$$

Nun gilt auf $\{T = \zeta\}$ f.s.: $D_{\ell U} = \zeta$, also $D_{\ell U_n} \uparrow D_{\ell U}$.

Auf $\{T < \zeta\} \cap \{D_{\ell U_n} \in U \text{ für } n \in \mathbb{N}\}$ gilt für fast alle ω: $X_{T(\omega)} \in E$, also $X_{T(\omega)} \in B_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und nach Voraussetzung (1) $(X_{D_{\ell U_n}}(\omega)) \subset B_{k+1} \cap U = U_{k+1}$ schließlich (im Widerspruch zu $X_{D_{\ell U_n}}(\omega) \in \ell U_n \subset \ell U_{k+1}$ für $n > k$).

Also ist $\{T < \zeta\} \cap \{D_{\ell U_n} \in U \text{ für } n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ f.s., und auf $\{T < \zeta\}$ ist f.s. $D_{\ell U_n} \uparrow D_{\ell U}$ mit pfadweise schließlich konstanter Konvergenz.

Es folgt: $\Pi_U f(x) = E^x(f \circ X_{D_{\ell U}},\ D_{\ell U} < \zeta) =$

$= E^x(\lim_n f \circ X_{D_{\ell U_n}},\ D_{\ell U} < \zeta) \underset{\text{Fatou}}{\leq} \lim_n E^x(f \circ X_{D_{\ell U_n}},\ D_{\ell U} < \zeta)$

$\leq \lim_n \Pi_{U_n} f(x) = f(x)$.

und damit die Behauptung mit (2.9). □

2.13 Folgerung:

Es sei $\mathcal{U}(E) \subset \mathcal{E}^n(E)$ ein System, das (2.12) (1) und (2) genügt. Dann ist eine Funktion $f \in \mathcal{B}_+^n(E)$ genau dann exzessiv, falls gilt:

(i) $\Pi_U f \leq f$ für alle $U \in \mathcal{U}(E)$;

(ii) $t \longmapsto f \circ X_t$ ist P^x-f.s. rechtsseitig unterhalbstetig in $t = o$ für alle $x \in E$.

Beweis:

'$\Rightarrow$' folgt aus (2.6).

'$\Leftarrow$': Nach (2.12) und (2.10.1) ist $f \in \mathcal{F}$ also nach (2.7.a) $f \in \mathcal{E}$.

□

2.14 Folgerung:

Es sei $\mathcal{U}(E) \subset \mathcal{P}^n(E)$ ein System, das (2.12) (1) und (2) genügt und der Voraussetzung

(3): für $x \in E$ enthält $\mathcal{U}(E)$ eine gegen $\{x\}$ absteigende Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offener Mengen.

Dann ist eine Funktion $f \in \mathcal{B}_+^n(E)$ genau dann exzessiv, falls gilt:

(i) $T_U f \leq f$ für alle $U \in \mathcal{U}(E)$;

(ii) ist $x \in E$ Nicht-Wartepunkt, so gilt für die gemäß (3) zugehörige Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\lim_n T_{U_n} f(x) = f(x)$.

Beweis:

'$\Rightarrow$' folgt aus (2.6).

'$\Leftarrow$': Nach (2.12) und (2.10.1) ist $f \in \mathcal{S}$, also nach (2.7.b) $f \in \mathcal{E}$, da wegen der Rechtsstetigkeit der Pfade

$$P^x(D_{\complement U_n} > 0) = P^x(\bigcup_{t>0}\{\omega \mid X_s(\omega) \in U_n \text{ für } s \leq t\}) = 1 \text{ ist.}$$

□

2.15 Bemerkung:

Speziell gelten die Aussagen (2.12)-(2.14), falls anstelle der Voraussetzungen (2.12) (1) und (2) gefordert ist, daß das System $\mathcal{U}(E)$ das Komplement jeder kompakten Menge in E enthält; denn dann erfüllt $\mathcal{U}(E)$ (1) und (2) für $B_n := E$ $(n \in \mathbb{N})$.

Aus (2.14) erhält man für Standard-Prozesse das klassische Ergebnis von Shur [34]:

2.16 Satz (Shur):

Ist X ein Standard-Prozeß auf E , wobei E lokalkompakt mit abzählbarer Basis ist, und ist $\mathcal{U}_c(E)$ das System aller relativ-kompakten offenen Mengen in E , so ist eine Funktion $f \in \mathcal{B}_+^n(E)$ exzessiv für X genau dann, wenn:

(i) $T_U f \leq f$ für alle $U \in \mathcal{U}_c(E)$;

(ii) $\lim_n \Pi_{U_n} f(x) = f(x)$ für alle $x \in E$ und $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{U}_c(E)$

mit: $(U_n) \searrow \{x\}$ und $P^x(T_{\complement U_n} > 0) = 1$.

Beweis:
Ist $f \in \mathcal{E}$, so gelten (i) und (ii) mit (2.5/2.6).
Umgekehrt: E hat eine abzählbare kompakte Ausschöpfung

$E = \bigcup_n K_n$ mit $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wählt man in den Voraussetzungen von (2.14) $B_n := \mathring{K}_n$, so ist (1) wegen der Quasilinksstetigkeit von X vor ζ erfüllt, (2) wegen der Kompaktheit der K_n und (3) wegen der abzählbaren Basis, so daß die Behauptung mit (2.14) folgt. □

Offenbar läßt sich der Begriff der auf E stark supermedianen Funktion lokalisieren. Gibt man nämlich für offene Mengen $\sigma \subset E$ ein System $\mathcal{U}(\sigma)$ von 'Testmengen' so vor, daß für $\sigma_1 \subset \sigma_2$ $\mathcal{U}(\sigma_1) \subset \mathcal{U}(\sigma_2)$ ist und $\mathcal{U}(E)$ die Voraussetzungen (2.12) (1) und (2) erfüllt, so bilden die Funktionenklassen $\mathcal{V}(\sigma) := \{f \in \mathcal{B}_+^n(E,\mathfrak{r}) \mid \Pi_U f \leq f \text{ für } U \in \mathcal{U}(\sigma)\}$ eine Prägarbe (d.h.: für $\sigma_1 \subset \sigma_2$ ist $\mathcal{V}(\sigma_2) \subset \mathcal{V}(\sigma_1)$), und es ist nach (2.12) $\mathcal{V}(E) = \mathcal{S}^*$.

Es stellt sich die Frage, für welche offenen Mengen σ und welche (zulässigen) Mengensysteme $\mathcal{U}(\sigma)$ die Garbeneigenschaft erfüllt ist (d.h.: $\sigma = \bigcup_i \sigma_i \Rightarrow \mathcal{V}(\sigma) = \bigcap_i \mathcal{V}(\sigma_i)$) .

Die Lokalisierung der stark supermedianen Funktionen ist der wesentliche Schritt zur Lokalisierung der exzessiven Funktionen, da die zusätzliche Regularitätsbedingung (2.13) (ii) oder (2.14) (ii) schon von 'lokaler' Art ist.

2.17 Bemerkung:

An dem Beispiel (1.8.1) sieht man, daß z.B. eine Lokalisierung mit dem System $\mathcal{U}_c(E)$ analog wie in (2.16) für Rechts-Prozesse nicht angemessen ist. Denn relativ-kompakte offene Mengen als 'Testmengen' erfassen nicht die Kopplung der

Funktionswerte exzessiver Funktionen über den Branch-Punkt b hinweg:

jedes $f \in \mathcal{E}$ ist monoton fallend und unterhalbstetig auf $[o,b)$ und auf $[a,\infty)$ und erfüllt die Bedingung $\lim_{x \nearrow b} f(x) \geq (1/2)f(a)$.

§ 3 Standard-H-Kegel

Es werden in diesem Paragraphen Begriffe und Bezeichnungen aus der H-Kegel-Theorie von Boboc/Bucur/Cornea eingeführt und der Zusammenhang der H-Kegel mit den Rechts- und Ray-Prozessen hergestellt. Die wesentlichen Sätze hierzu werden aus Boboc/Bucur/Cornea/Höllein [8] zitiert. Ferner wird die Einordnung der Balayage-Räume gemäß [25] angegeben, und mittels des Satzes von Hunt aus § 2 werden die 'gefegten Maße' mit den 'Trefferverteilungen' gewisser Rechts-Prozesse identifiziert.

Standard-H-Kegel sind geordnete Kegel mit Eigenschaften, wie sie die Kegel exzessiver Funktionen zu absolut stetigen Resolventen mit eigentlichem Initialkern aufweisen. Standard-Funktionen-H-Kegel entsprechen speziell den exzessiven Funktionen gewisser Rechts-Prozesse und die bei Standard-Balayage-Räumen auftretenden Funktionenkegel den exzessiven Funktionen gewisser Standard-Prozesse.

Für ausführliche Definitionen wird auf [8] verwiesen.

3.1 Bezeichnungen:

Ein H-Kegel S ist ein geordneter konvexer Kegel mit Verbandseigenschaften und Riesz-Zerlegungs-Eigenschaft (vgl. [8]-2.1). Dabei bildet S den Kegel der positiven Elemente eines kanonisch assoziierten geordneten Vektorraumes $\langle S \rangle$, d.h. es gilt: $\langle S \rangle = S - S$.

Ein Standard-H-Kegel (i.f.: SHK) S ist ein H-Kegel, der eine 'schwache Einheit' (oder ein 'strikt positives Element') u enthält und eine abzählbare Menge universell stetiger Elemente, die in S aufsteigend dicht liegt. Dabei sind universell stetige Elemente $s \in S$ (i.Z.: $s \in S_0$) diejenigen, die bei Approximation von unten durch Folgen in S stets 'universell gleichmäßig' approximiert werden (d.s.h.: gleichmäßig bzgl. jeder schwachen Einheit in S) (vgl.[8]-4.2).

Ein H-Kegel S von positiven Funktionen auf einer Menge E heißt Funktionen-H-Kegel (i.f.: FHK), im wesentlichen falls die Verbandsoperationen die punktweisen sind, ferner S die Punkte von E trennt und zu jedem $x \in E$ eine in x strikt positive Funktion in S existiert (vgl. [8]-3.1).

Ein H-Kegel S heißt Standard-Funktionen-H-Kegel (i.f.: SFHK), falls S Standard- und Funktionen-H-Kegel und $1 \in S$ ist (vgl. [8]-4.3).

Zu einem SHK S ist sein Dual S^*, bestehend aus den 'H-Integralen' auf S, ebenfalls wieder SHK (vgl. [8]-4.4.10). Die natürliche Topologie auf S^* ist die von den Abbildungen $\{m \longmapsto m(s) \mid s \in S_o\}$ erzeugte, sie werde mit τ_o^* bezeichnet. und ist die Restriktion auf S^* der schwachen Topologie $\sigma(\langle S^*\rangle, \langle S_o\rangle)$ bezgl. des Dualsystems $(\langle S^*\rangle, \langle S_o\rangle)$.
Ist S SFHK auf E, so wird die natürliche Topologie auf E, erzeugt von den Abbildungen $\{x \longmapsto s(x) \mid s \in S_o\}$, mit τ_o bezeichnet (vgl. [8]-4.5).

Für $s \in S$ (S SHK) sei $\tilde{s}$ das Auswertungsfunktional auf S^* im Punkte s, d.h.: $\tilde{s}(m) := m(s)$, und $\tilde{S} := \{\tilde{s} \mid s \in S\} \subset S^{**}$.
Für eine schwache Einheit $u \in S$ seien $\sum_u := \{m \in S^* \mid m(u) \leq 1\}$, $\Xi_u := (\operatorname{Ext} \sum_u) \setminus \{0\}$ und $S_u := \{\tilde{s}_{|\Xi_u} \mid s \in S\}$, wobei $\operatorname{Ext} \sum_u$ die Extremalpunktmenge von $\sum_u$ bezeichnet).

Nach [8]-Th.4.2.12/S.113ff gilt für einen SHK S und eine schwache Einheit $u \in S$:

3.2 Satz:

a) (S^*, τ_o^*) ist vollständig metrisierbar mit abzählbarer Basis;

b) $\sum_u$ ist Choquet-Simplex;

c) Ξ_u ist bezüglich τ_o^* G_δ-Menge in $\sum_u$;

d) S_u ist ein zu S isomorpher SFHK auf Ξ_u;

e) $S_u \subset \mathcal{C}_\ell(\Xi_u)$; $(S_u)_o \subset \mathcal{C}_b(\Xi_u)$;

f) zu $m \in S^*$ mit $m(u) < \infty$ existiert ein Borel-Maß $\mu \in \mathcal{M}^+_e(\Xi_u)$ mit $\mu(\tilde{s}) = m(s)$ (für $s \in S$) .

g) Ist überdies S SFHK auf einer Menge E und $u = 1$, so läßt sich E in Ξ_1 homöomorph (bzgl. der natürlichen Topologien) einbetten mittels der Abbildung $i : x \longmapsto \varepsilon_x$ (für $x \in E$) .

3.3 Bemerkungen/Bezeichnungen:

1.) Wegen (3.2.d) sagt man, der SHK S lasse sich auf dem Simplex Σ_u realisieren. Ferner sagt man, ein SHK lasse sich auf einem Bauer-Simplex realisieren, falls eine schwache Einheit $u \in S$ existiert, für die Σ_u Bauer-Simplex (d.h. $\operatorname{Ext}\Sigma_u$ abgeschlossen) ist.

2.) Man bezeichnet den SFHK S_1 auf Ξ_1 (aus 3.2.g) als die natürliche Erweiterung von S auf E . E heißt gesättigt, falls $i(E) = \Xi_1$ ist, d.h. falls $\Xi_1 = \{\varepsilon_x \mid x \in E\}$ (vgl. [8]-S.115).

3.) Falls S SFHK auf gesättigter Menge E ist, so wird im folgenden (E,S) mit (Ξ_1, S_1) identifiziert. Überdies betrachten wir alle $s \in S$ als fortgesetzt auf $E \cup \{0\} = \operatorname{Ext}\Sigma_1$ durch $s(0) := o$, so daß $\tilde{S}|_{E\cup\{0\}}$ mit S identifiziert wird.

4.) Die Funktionen $\tilde{s}$ für $s \in S_o$ sind stetig affin auf Σ_u mit $\tilde{s}(0) = o$, und $\{\tilde{s} \mid s \in S_o\}$ trennt die Punkte von S^* .

5.) Für jeden SHK S und jede schwache Einheit $u \in S$ ist Ξ_u gesättigt; denn die Abbildung

$\varphi : \tilde{\Sigma}_1 := \{m \in (S_u)^* \mid m(1) \neq 1\} \longrightarrow \Sigma_u$ mit $\varphi(m)[s] := m(\tilde{s})$

ist ein Homöomorphismus bzgl. der natürlichen Topologien auf $(S_u)^*$ und S^* . Also ist mit (3.2.d) jeder SHK isomorph zu einem SFHK auf einer gesättigten Menge.

6.) Das Borel-Maß $\mu \in \mathcal{M}^+_e(\Xi_u)$ (aus 3.2.f) ist eindeutig, wie man sich mittels der Punktetrennung von $\{\tilde{s} \mid s \in S_o\}$ (vgl.4.)) überlegt.

Wir kommen zu dem Zusammenhang der H-Kegel mit exzessiven Funktionen und Prozessen:

3.4 Satz (vgl. [8]-Th.4.4.6-S.68/S.113):

Die (U_α)-f.s. endlichen exzessiven Funktionen $\mathcal{E}_f(U_\alpha)$ einer absolut stetigen Resolvente $(U_\alpha)_{\alpha \geq 0}$ mit eigentlichem Initialkern U_0 auf einem Meßraum $(E,\mathcal{E})$ bilden einen SHK; sie bilden einen SFHK, falls überdies $\mathcal{E}_f(U_\alpha)$ inf-stabil ist, $1 \in \mathcal{E}_f(U_\alpha)$ ist und $\mathcal{E}_f(U_\alpha)$ die Punkte von E trennt. □

3.5 Satz (vgl. [8]-Th.6.22/Th.4.4.4-S.241):

Es seien S SFHK auf einer gesättigten Menge E, $\overline{E}$ der Abschluß bzgl. τ_0^* von E in Σ_1, $\mathcal{B}(\overline{E})$ die τ_0^*-Borel-Mengen auf $\overline{E}$ und $p \in S$ ein 'geeigneter' Erzeuger von S (vgl. [8]-Th.6.2.2-S.118).

Dann existiert eine submarkovsche starke Ray-Resolvente $(V_\alpha)_{\alpha \geq 0}$ mit Ray-Halbgruppe $(Q_t)_{t \geq 0}$ auf $(\overline{E},\mathcal{B}(\overline{E}))$ mit:

(i) für $x \in \overline{E}$ ist $\infty > \tilde{p}(x) = \int_0^\infty Q_t 1(x)dt = V_0 1(x)$;

(ii) $\mathcal{E}_b(V_\alpha) \subset \tilde{S}|_{\overline{E}} \subset \mathcal{E}_f(V_\alpha)$ als solide Teilkegel;

(iii) $\overline{E} \setminus E$ ist die Menge der Branch-Punkte von (V_α) . □

3.6 Beispiele:

1.) Gemäß (3.4) bilden die f.s. endlichen exzessiven Funktionen eines transienten Rechts-Prozesses mit Referenzmaß auf E stets einen SFHK auf E .

Die unter (1.8) aufgeführten Beispiele besitzen jeweils ein Referenzmaß. Bis auf den Geburts- und Todes-Prozeß aus (1.8.4) sind alle Prozesse in (1.8) transient. In (1.8.4) läßt sich Transienz erreichen durch Vorgabe eines strikten Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßes als Sprungmaß .

2.) Für die '(gleichförmige) Bewegung nach rechts' auf $E := (o,\infty)$ sind die exzessiven Funktionen $\mathcal{E}$ die positiven unterhalbstetigen monoton fallenden; $\mathcal{E}_f$ bildet nach (3.4) einen SFHK auf E . E ist nicht gesättigt; man überlegt

sich, daß $E_1 \cong [o,\infty)$ ist und daß die Funktionen $\{\tilde{s}|_{E_1} \mid s \in \mathcal{E}_f\}$ die durch $\varinjlim_{\cdot \nearrow o}$ in o fortgesetzten Funktionen aus $\mathcal{E}_f$ sind. Die universell stetigen sind hier die stetigen beschränkten Funktionen in $\mathcal{E}$ mit kompaktem Träger, und die natürliche Topologie auf E_1 ist die euklidische.

3.) Man betrachte in der Situation 2.) z.B. für $u := \begin{cases} 2 \text{ auf } (o,a) \\ 1 \text{ auf } [a,\infty) \end{cases}$ mit $o < a < \infty$ den Darstellungsraum E_u: Man kann nachrechnen, daß (E_u, τ_o^*) homöomorph ist dem Raum $[o,a) \otimes [a,\infty)$ mit der euklidischen Summentopologie. Die Funktionen $\{\tilde{s}|_{E_u} \mid s \in \mathcal{E}_f\}$ sind die positiven auf $[o,a) \otimes [a,\infty)$, die auf jedem der Intervalle unterhalbstetig und monoton fallend sind und der Bedingung $\lim_{x \nearrow a} f(x) \geq (1/2)f(a)$ genügen. Dann bilden die Funktionen $\{\tilde{s}|_{\overline{E}} \mid s \in \mathcal{E}_f\}$ (wo $\overline{E} \cong [o,a] \otimes [a,\infty]$) eine Obermenge der beschränkten exzessiven Funktionen des nach (3.5) zugehörigen Ray-Prozesses auf $\overline{E}$ (vgl. Bsp.1.8.1).

4.) In der Situation 2.) existieren Funktionen $v \in \mathcal{E}_f$, die in allen rationalen Punkten aus (o,∞) unstetig sind (denn sei z.B. F die Verteilungsfunktion eines endlichen Maßes $\sum_{x \in \mathbb{Q}_+} a_x \varepsilon_x$ mit $a_x > o$ und $u := 1 - F$). In einem solchen Fall ist E_u wieder die Menge $\mathbb{R}_+$, und die natürliche Topologie ergibt sich wie folgt: offene Umgebungen von irrationalen Zahlen sind euklidische, von rationalen Zahlen rechtsseitige euklidische.

3.7 Bemerkungen:

1.) Es ist darauf zu achten, daß in [8] exzessive Funktionen einer Resolvente (W_α) auf einem Meßraum $(E,\mathcal{E})$ als (W_α)-f.s. endlich und $\mathcal{E}$-meßbar vorausgesetzt sind. In der Situation (3.5) sind alle exzessiven Funktionen auf $\overline{E}$ τ_o^*-unterhalbstetig, also $\mathcal{B}(\overline{E})$-meßbar.

2.) Falls $0 \in \overline{E}$ ist in der Situation (3.5), so ist $Q_t(0,\cdot)$ das Nullmaß auf $\mathcal{B}(\overline{E})$ für alle $t \geq o$, denn:

$0 \leq Q_t 1_{\overline{E}}(0) = Q_t 1_E(0) = Q_t \tilde{1}(0) = \tilde{1}(0) = 0$,
weil $Q_t(0,\cdot)$ auf E lebt (nach 3.5iii), $1 \in S$ ist,
$\tilde{1} = 1_E$ Q_t-exzessiv auf $\overline{E}$ ist.

Mit den Bezeichnungen aus (3.5/3.7) wird im folgenden gezeigt, daß man bei Wahl von $0 \in \mathrm{Ext}\,\Sigma_1$ als Friedhof für den zugehörigen Ray-Prozeß eine markovsche starke Ray-Resolvente auf $\overline{E} \cup \{0\}$ erhält:

3.8 Lemma (vgl. [8]-S.242):

Es sei S SFHK auf E wie in (3.5), $\Delta := 0 \in \Sigma_1$,
$K_\Delta := \overline{E} \cup \{0\}$. Ferner bezeichne $(\tilde{Q}_t)_{t\geq 0}$ die markovsche Fortsetzung (bzw. Abänderung in 0) auf K_Δ der Ray-Halbgruppe $(Q_t)_{t\geq 0}$ auf $\overline{E}$.
Dann ist die zu $(\tilde{Q}_t)_{t\geq 0}$ gehörige Resolvente $(\tilde{V}_\alpha)_{\alpha>0}$ eine starke Ray-Resolvente auf K_Δ .

Beweis:
Es ist für $f \in \mathcal{B}_b(K_\Delta)$:

$$\tilde{V}_\alpha f(x) = \begin{cases} V_\alpha(f|_{\overline{E}})(x) + f(\Delta)\left(\frac{1}{\alpha} - V_\alpha 1_{\overline{E}}(x)\right) , & \text{falls } x \neq \Delta \\ \frac{1}{\alpha} f(\Delta) , & \text{falls } x = \Delta . \end{cases}$$

Ist nun $x \neq \Delta$, so sind die beiden Summanden auf der rechten Seite stetig in x , da (V_α) starke Ray-Resolvente auf $\overline{E}$ ist. Ist $x = \Delta$, und $\Delta \in \overline{E}$, so sei $(x_n) \subset \overline{E}$ eine gegen Δ konvergente Folge. Dann konvergiert $(\tilde{V}_\alpha f(x_n))_n$ wegen (3.7.2) gegen $V_\alpha(f|_{\overline{E}})(\Delta) + f(\Delta)\left(\frac{1}{\alpha} - V_\alpha 1_{\overline{E}}(\Delta)\right) = \frac{1}{\alpha} f(\Delta) = \tilde{V}_\alpha f(\Delta)$.
Da $\tilde{S}_0|_{K_\Delta}$ ein punktetrennender Teilkegel der $(\tilde{V}_\alpha)$-f.s. endlichen exzessiven Funktionen f auf K_Δ mit $f(\Delta) = 0$ ist, trennt auch $\mathcal{E}_c(\tilde{V}_\alpha)$ die Punkte von K_Δ . □

3.9 Bemerkungen:

1.) Die Nicht-Branch-Punkte von $(\tilde{V}_\alpha)$ aus (3.8) sind $E \cup \{\Delta\}$.

2.) Nach Definition ist $(\tilde{V}_\alpha)$ die markovsche Fortsetzung

(bzw. Abänderung) auf K_Δ der Resolvente (V_α) auf $\overline{E}$.

3.) Es bezeichnen im folgenden $(\widetilde{U}_\alpha)$ (bzw. (U_α)) die Einschränkung von $(\widetilde{V}_\alpha)$ auf die Nicht-Branch-Punkte $E \cup \{\Delta\}$ (bzw. auf E). Dann ist gemäß (1.5.5) (U_α) die Resolvente eines Borel-Rechts-Prozesses auf E , und es gilt mit (3.5): $\mathcal{E}_b(U_\alpha) \subset \widetilde{S}|_E \subset \mathcal{E}_f(U_\alpha)$.

4.) Für einen zu einem SFHK auf einer gesättigten Menge E gemäß (3.5) existierenden Rechts-Prozeß gilt wegen $V_0 1 = \widetilde{p} < \infty$ auf E: $P^x(\zeta < \infty) = 1$ für $x \in E$ (wobei ζ die Lebenszeit (vgl. 1.7) sei).

5.) Ist in (3.5) Σ_1 Bauer-Simplex (d.h. $E \cup \{0\}$ kompakt bzgl. τ_0^*), so ist E bzgl. τ_0^* lokalkompakt (mit abzählbarer Basis) und $K = \overline{E} \cup \{\Delta\} = \overline{\mathrm{Ext}\,\Sigma_1} = \mathrm{Ext}\,\Sigma_1 = E \cup \{\Delta\}$ enthält keine Branch-Punkte für $(\widetilde{V}_\alpha)$, so daß $(\widetilde{V}_\alpha) = (\widetilde{U}_\alpha)$ eine starke Feller-Resolvente auf K ist, bzw. (U_α) die starke Feller-Resolvente eines Standard-Prozesses auf E , die überdies $\mathcal{B}_b(E)$ in $\mathcal{C}_0(E)$ abbildet.

Der Zusammenhang der von Bliedtner/Hansen [4] eingeführten Standard-Balayage-Räume (i.f.: SBR) mit den SHK ist gemäß Janßen [25] der folgende:

3.10 Bemerkungen:

1.) Definiert man einen SHK S und einen SBR $(E,\mathcal{W})$ als assoziiert zueinander, falls $\mathcal{W}$ einen aufsteigend dichten Teilkegel $\mathcal{W}^1$ enthält, der FHK ist, isomorph zu S , so gilt nach [25]:

(i) Jeder SBR ist assoziiert zu einem SHK, der auf einem Bauer-Simplex realisiert werden kann.

(ii) Ein SHK S ist assoziiert zu einem SBR genau dann, wenn S auf einem Bauer-Simplex realisierbar ist.

2.) Genauer gilt nach [25]: Ist $(E,\mathcal{W})$ SBR, so existiert ein aufsteigend dichter Teilkegel $\mathcal{W}^1$ von $\mathcal{W}$, der SHK ist, und ein $p \in \mathcal{W}^1 \cap \mathcal{C}(E)$, so daß das Darstellungs-Simplex Σ_p zu $\mathcal{W}^1$

Bauer-Simplex ist und $E_\Delta \cong \mathrm{Ext}\,\Sigma_p$. Nach Identifizierung von E_Δ mit $\mathrm{Ext}\,\Sigma_p$ bildet $\widetilde{\mathcal{W}}_p^1$ die Menge $\frac{1}{p}\mathcal{W}^1$.
Für eine gemäß (3.9.3) zugehörige Resolvente (U_α) auf E gilt dann: $\frac{1}{p}\mathcal{W}^1 \subset \mathcal{E}_f(U_\alpha)$ aufsteigend dicht.
Also bildet $\mathcal{W}^1$ einen aufsteigend dichten Teilkegel von $\mathcal{E}_f(W_\alpha)$, wo $(W_\alpha)_{\alpha>0}$ durch Doob-Transformation mittels p aus (U_α) hervorgeht, d.h.: $W_\alpha(f) = \frac{1}{p}U_\alpha(p\cdot f)$ für $\alpha \geq 0$.
Und wegen des Zusammenhanges $\mathcal{E}(W_\alpha) = p\cdot\mathcal{E}(U_\alpha)$ ergibt sich $\mathcal{W} = \mathcal{E}(W_\alpha)$ für den Ausgangs-Kegel $\mathcal{W}$. (Man vgl. [16]-Bd.I-9.10 zur Doob-Transformation.)

Wir betrachten abschließend die Reduzierten bei SFHK:

3.11 Definition:

Für einen SFHK S auf einer Menge E und für $A \subset E$ sei $B^A : S \longrightarrow S$ die Abbildung $s \longmapsto \mathrm{INF}\,\{t \in S \mid t \geq s \text{ auf } A\}$ (wobei INF das Infimum bzgl. der Ordnung in S bezeichnet). Es ist nach [8]-S.75 $B^A s$ die (bzgl. feiner Topologie auf E) Regularisierte der Reduzierten R_s^A von s über A, $B^A s$ heißt auch die Gefegte von s über A .

3.12 Lemma:

Ist S SFHK auf einer gesättigten Menge E , so existiert zu $A \subset E$ und $x \in E$ genau ein Sub-Wahrscheinlichkeitsmaß $\varepsilon_x^A \in \mathcal{M}^+(E)$ (sog. gefegtes Maß) mit $\varepsilon_x^A(s) = B^A s(x)$ für alle $s \in S$.

Beweis:
Die Komposition $\varepsilon_x \circ B^A : S \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ liefert ein H-Integral $m_{x,A}$ auf S mit $m_{x,A}(1) \leq 1$. Also folgt die Behauptung mit (3.2.f/3.3.6). □

3.13 Satz:

Es sei S SFHK auf einer gesättigten Menge E ; dann gilt für die Trefferkerne $P_A(x,)$ eines gemäß (3.5/3.9.3) zuge-

hörigen Rechts-Prozesses auf E für
$A \in \mathcal{B}^n(E)$, $x \in E$: $B^A s(x) = P_A s(x)$ für alle $s \in S$.

Beweis: Es ist $B^A s = \hat{R}^A_s$ (vgl.3.11), so daß die Behauptung mit (3.12) aus dem Satz von Hunt (vgl. 2.2/2.3) folgt. □

3.14 Folgerung:

Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus (3.12/3.13) gilt für $U \in \mathcal{B}^n(E)$:

(i) $\varepsilon_x^{\complement U} = P_{\complement U}(x,\cdot)$ für jedes $x \in E$;

(ii) $\varepsilon_x^{\complement U} = \Pi_U(x,\cdot)$ für jedes $x \in U$. □

Als Anwendung der H-Kegel-Theorie im Zusammenhang mit der 'Gefegten' ergibt sich speziell das Ergebnis aus (1.8.5) für die zeitgeänderten Standard-Prozesse (1.8.5.a und b); die dort betrachteten Ausgangs-Prozesse fallen nämlich sogar in den Kontext der harmonischen Räume im Sinne von [13]:

3.15 Bemerkung:

Falls S SFHK auf E ist und $A \subset E$ mit der Eigenschaft:
(*) $A = \{x \in E \mid B^A s(x) = s(x) \text{ für } s \in S\}$
(d.h.: A ist 'basic' (vgl. [8]-S.87)), so bildet nach [8]-Prop.(3.3.8)/Cor(5.2.6.c) $S^{(A)} := \{B^A s \mid s \in S\}$ einen SHK.

Startet man mit dem SFHK S der f.s.-endlichen exzessiven Funktionen zu einem transienten Rechts-Prozeß mit Referenzmaß auf E (gesättigt), und wählt man eine Menge $A \in \mathcal{B}^n(E)$ mit (*) , so bildet also $S^{(A)} = \{P_A s \mid s \in S\}$ (vgl. 3.14) einen SHK.
Speziell in den Beispielen (1.8.5.a/b) erfüllen die dort definierten Mengen A die Voraussetzung (*) und sind jeweils gleich dem feinen Träger des Potentialkernes der 'zeitgeänderten Resolvente' $(U'_\alpha)_{\alpha \geq 0}$.

Also folgt mit [13] -Ex10.2.2/Ex.10.2.3 (S.263ff) für (1.8.5.a/b) über die Bemerkungen unter (1.8.5) hinaus:

1.) Der Initialkern P'_0 der zeitgeänderten Halbgruppe (P'_t) ist gleich dem Trefferkern P_A des Ausgangs-Prozesses.

2.) Die exzessiven Funktionen des zeitgeänderten Prozesses bilden die Menge $\{u \in \mathcal{E} \mid u = P_A u\} \supset S^{(A)}$ (wenn $\mathcal{E}$ die exzessiven des Ausgangs-Prozesses bezeichnet).

3.) In Beispiel (1.8.5.b) bildet die Menge A'' mit dem Kegel $\mathcal{W} := \{u_{|A} \mid u \in \mathcal{E}\ ,\ P'_A u = u\}$ einen SBR (vgl. [4]-Th. 4.1).

Bei einem SBR $(E,\mathcal{W})$ besitzt die von Bliedtner/Hansen in [4] - § 3 zu dem Kegel $\mathcal{W}$ definierte hyper-harmonische Prägarbe die Garbeneigenschaft. Dabei ist für offene Mengen $O \subset E$: $\mathcal{H}^*_+(O) := \{f \in \mathcal{B}_+(E) \mid \varepsilon_x^{CU}(f) \leq f(x)$ für $x \in E$, für U offen, relativ-kompakt in O und f in O unterhalbstetig$\}$, und es gilt $\mathcal{H}^*_+(E) = \mathcal{W}$.

Bei SHK stellt sich die entsprechende Frage nach einer lokalen Struktur.

Auf Grund von (3.5) läßt sich dieses Problem als Spezialfall der Lokalisierung der exzessiven Funktionen bei Rechts-Prozessen (vgl. § 2, Ende) formulieren; auf Grund von (3.13/3.14) kann man dabei eine H-Kegel-interne Beschreibung, entsprechend der obigen für SBR, erwarten.

Kapitel II Choquet- und faziale Topologien

§ 4 Topologien auf Choquet-Rändern

Dieser Paragraph dient der Einführung der mit konvexen Kegeln stetiger Funktionen auf kompakten Räumen verbundenen allgemeinen Choquet-Theorie. Es werden zuerst einige der benötigten Ergebnisse von Boboc/Cornea [9] zusammengestellt, dann auf dem zu dem Kegel assoziierten Choquet-Rand gemäß Boboc/Bucur [6] eine 'Choquet-Topologie' definiert und einige Eigenschaften dieser Topologie hergeleitet bzw. aus [6] zitiert.

4.1 Bezeichnungen:

Es seien im folgenden (K,τ) ein kompakter (Hausdorff-) Raum, $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K)$ ein konvexer Kegel mit den Eigenschaften:

(i) $\mathcal{F} - \mathcal{F}$ liegt dicht in $\mathcal{C}(K)$ (bzgl. gleichmäßiger Konvergenz);

(ii) es gibt $u,v \in \mathcal{F}$ mit $u > 0$, $v < 0$.

Mit '$\prec_{\mathcal{F}}$' (bzw. kurz '$\prec$') wird die in (0.4) definierte zu $\mathcal{F}$ assoziierte Halb-Ordnung auf $\mathcal{M}^+(K)$ bezeichnet. Für $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ bezeichnet $\mathrm{Tr}\mu$ den Träger von μ.

4.2 Bemerkung:
Wegen (i) ist '$\prec$' eine Ordnung und $\mathcal{F}$ verschränkt punktetrennend auf K . Aus (ii) ergibt sich, daß für $x \in K$ und $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ mit $\mu \prec \varepsilon_x$ gilt: $0 < \mu(K) < \infty$.

4.3 Definition:
a) $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ heißt (<u>$\mathcal{F}$-)minimal</u>, falls μ minimal ist bzgl. '$\prec$' .

b) Es sei $\partial_{\mathcal{F}} K := \{ x \in K \mid \varepsilon_x \ \mathcal{F}\text{-minimal} \}$ der <u>Choquet-Rand von K bzgl. $\mathcal{F}$</u> (Bezeichnung kurz: ∂K).

c) Eine abgeschlossene Menge A in K heißt $(\mathcal{F}$-$)$absorbierend, falls für $x \in A$ und $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ mit $\mu \prec \varepsilon_x$ $\mathrm{Tr}\mu \subset A$ ist.

d) Eine meßbare, nach unten beschränkte Funktion $h : K \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ heißt $\mathcal{F}$-affin, falls für $\mu,\nu \in \mathcal{M}^+_e(K)$ mit $\mu \prec \nu$ gilt: $\mu(h) = \nu(h)$.

e) Es seien:

$$\hat{\mathcal{F}} := \left\{ f \in \mathcal{C}_e(K) \;\middle|\; \text{für } x \in K, \mu \in \mathcal{M}^+(K): \mu \overset{\prec}{\mathcal{F}} \varepsilon_x \Longrightarrow \mu(f) \leq f(x) \right\};$$

$$\bar{\mathcal{F}} := \mathcal{C}(K) \cap \hat{\mathcal{F}} .$$

f) $(K,\mathcal{F})$ heißt simplizial, falls für jedes $x \in K$ und je zwei minimale Maße μ_1,μ_2 mit $\mu_i \prec \varepsilon_x$ $(i = 1,2)$ gilt: $\mu_1(f) = \mu_2(f)$ für jedes $f \in \mathcal{F}$, d.h.: $\mu_1 = \mu_2$.

g) Für eine Funktion $g : K \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ und $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ seien:

$$^{\mathcal{F}}Rg := \inf \{ f \in \mathcal{F} \mid f \geq g \}, \quad ^{\mathcal{F}}R_\mu g := \inf \{ \mu(f) \mid f \geq g , f \in \mathcal{F} \}.$$

4.4 Beispiele:

1.) Ist $\mathcal{F} = \mathcal{C}(K)$ für einen kompakten Raum (K,τ) , so ist '$\prec$' in $\mathcal{M}^+(K)$ die Gleichheit. Also ist der Choquet-Rand $\partial K = K$.

2.) Ist K eine kompakte konvexe Menge in einem lokalkonvexen Raum, so ist die mit dem Kegel $\mathcal{P}_c(K)$ assoziierte Ordnung '$\prec$' die Bishop-De-Leeuw-Ordnung (vgl. 0.5), und der Choquet-Rand $\partial_{\mathbb{R}} K$ ist die Menge der Extremalpunkte $\mathrm{Ext}(K)$. Jede abgeschlossene Seite ist $\mathcal{P}_c(K)$-absorbierend (vgl. Alfsen [1]-II.6.10), umgekehrt bildet jede konvexe $\mathcal{P}_c(K)$-absorbierende Menge eine abgeschlossene Seite in K .

3.) Ist $(V_\alpha)_{\alpha > 0}$ eine markovsche Ray-Resolvente auf einem kompakten metrischen Raum (K,τ) , so erfüllt $\mathcal{G} := \mathcal{G}_c^\infty + \mathbb{R}$ (vgl. § 1) die Voraussetzungen (4.1). Es ist für die zu (V_α) gehörige Ray-Halbgruppe $(Q_t)_{t \geq 0}$ und für alle $x \in K$: $Q_0(x,\cdot) \overset{\prec}{\mathcal{G}} \varepsilon_x$ und folglich $\partial_{\mathcal{G}} K \subset D$.

Wie im folgenden gezeigt wird, ist sogar $\partial_{\mathcal{G}} K = D$:

4.5 Iemma:

In der Situation von Beispiel (4.4.3) gilt:

a) für $\mu,\nu\in\mathcal{M}_1^+(K)$, $\alpha>0$: $\mu \prec_{\mathcal{G}_c^\alpha} \nu \Longrightarrow \begin{cases}(i) & \mu_{V_\alpha(\mathcal{C}_\ell)} \preceq \nu \\ (ii) & \mu_{\mathcal{E}_c^\alpha} \preceq \nu\end{cases}$;

b) für $\mu,\nu\in\mathcal{M}_e^+(K)$: $\mu \prec_{\mathcal{E}^\infty+\mathbb{R}} \nu \Longrightarrow \mu_{\mathcal{E}^\infty\cap\mathcal{C}_\ell} \preceq \nu$;

c) für $\mu,\nu\in\mathcal{M}_1^+(K)$, $\alpha>0$: $\mu \prec_{\mathcal{G}_c^\alpha} \nu \Longrightarrow \mu \prec_{\mathcal{G}_c^\infty+\mathbb{R}} \nu$.

Beweis:

a) (i) Für $g\in\mathcal{C}^+$ mit $0\le g\le 1$ gilt wegen
$1 = V_\alpha g + V_\alpha(1-g)$ und wegen $V_\alpha g$, $V_\alpha(1-g)\in\mathcal{G}_c^\alpha$:
$1 = \mu(1) = \mu(V_\alpha g) + \mu(V_\alpha(1-g)) \le \nu(V_\alpha g) + \nu(V_\alpha(1-g)) = 1$.

(ii) Jedes $f\in\mathcal{E}_c^\alpha$ ist wegen
$f = \sup_n nV_{\alpha+n}f = \sup_n nV_\alpha(f-nV_{\alpha+n}f)$ darstellbar als Supremum einer aufsteigenden Folge von α-Potentialen stetiger Funktionen.

b) Wegen $(\pm 1)\in\mathcal{G}_c^\infty+\mathbb{R}$, ist $\mu(1) = \nu(1) =: c$ und im Falle $c>0$: $\frac{\mu}{c} \prec_{\mathcal{G}_c^\infty} \frac{\nu}{c}$ für $\frac{\mu}{c}$, $\frac{\nu}{c}\in\mathcal{M}_1^+(K)$.

Für $\alpha\ge 0$ und $f\in\mathcal{E}^\alpha\cap\mathcal{C}_\ell$ ist $f = \sup_n nV_{\alpha+n}f$ mit $V_{\alpha+n}f\in V_{\alpha+n}(\mathcal{C}_\ell)$, folglich mit a)(i):
$\frac{\mu}{c}(V_{\alpha+n}f) = \frac{\nu}{c}(V_{\alpha+n}f)$ für α,n .

c) Es sei $f\in\mathcal{G}_c^\infty+\mathbb{R}$, also $f = g + c$ mit $c\in\mathbb{R}$ und $g\in\mathcal{G}_c^\beta$ $(\beta\ge 0)$.

Falls $\beta>\alpha$ ist, so ist g darstellbar als $g_1 - g_2$ mit $g_i\in\mathcal{G}_c^\alpha$, wobei $g_1 := g + (\beta-\alpha)V_\alpha g$, $g_2 := (\beta-\alpha)V_\alpha g$.
(Man rechnet $\gamma V_{\alpha+\gamma}g_1 \le g_1$ für $\gamma>0$ leicht nach.)
Ferner ist mit a)(ii) $\mu(g_2) = \nu(g_2)$, also:
$\mu(f) = \mu(g_1) - \mu(g_2) + c \le \nu(g_1) - \nu(g_2) + c = \nu(f)$. □

Es folgt die Charakterisierung von D (vgl. Meyer [31]-X.T 21):

4.6 Satz:

In der Situation (4.4.3) sind für $x \in K$, $\alpha > 0$ äquivalent:

(1) $x \in D$:

(2) $\varepsilon_x Q_\alpha = \varepsilon_x$;

(3) $\lim_{t \searrow 0} Q_t f(x) = f(x)$ für $f \in \mathcal{C}$;

(4) für $\mu \in \mathcal{M}_1^+(K)$: $\mu \underset{\mathcal{C}}{\prec} \varepsilon_x \Longrightarrow \mu = \varepsilon_x$;

(5) für $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$: $\mu \underset{\mathcal{C}_c^\sim + \mathbb{R}}{\prec} \varepsilon_x \Longrightarrow \mu = \varepsilon_x$ (d.h.: $x \in \partial_{\mathcal{C}} K$) .

Beweis:

Die Äquivalenz von (1), ...,(4) ist Inhalt von [31]-X.T.21;

'(4) $\Rightarrow$ (5)' ist gültig, da $\mu \underset{\mathcal{C}_c^\sim + \mathbb{R}}{\prec} \varepsilon_x$ impliziert: $\mu \in \mathcal{M}_1^+(K)$;

'(5) $\Rightarrow$ (4)' folgt aus (4.5.c). □

In (4.7) sind einige bekannte Eigenschaften der in (4.3) definierten Objekte zusammengefaßt (für die spezielle Situation 4.1). Die Aussagen finden sich in Boboc/Cornea [9] oder - für den Fall, daß $\mathcal{F}$ die Konstanten enthält - auch in Alfsen - [1]-I-§ 5.

4.7 Bemerkungen:

1.) Funktionen $f \in \hat{\mathcal{F}}$ genügen dem folgenden Minimum-Prinzip: $f \geq 0$ auf $\partial K \Longrightarrow f \geq 0$ (vgl. [9]-Cor 2.1).

2.) Mit der definierenden Eigenschaft erhält man für absorbierende Mengen $A \subset K$: $\partial_{\mathcal{F}|_A} A = A \cap \partial_{\mathcal{F}} K$.
Daraus folgt mit 1.) und (4.1.ii), daß für nichtleere absorbierende Mengen $A \subset K$ $A \cap \partial_{\mathcal{F}} K$ nichtleer ist.

3.) Zu $x \in K$ existiert ein minimales Maß $\mu \prec \varepsilon_x$ (vgl. [9]-Th.1.1).

4.) Ist f oberhalbstetig und nach oben beschränkt, so existiert zu $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ ein $\mu_0 \in \mathcal{M}^+(K)$ mit $\mu_0 \prec \mu$ und $R_{\mu_0} f = \mu_0(f)$ (vgl. [9]-L.1.1).

5.) Falls $\mathcal{F}$ inf-stabil ist und $B \supset \partial K$ meßbar, so ist für ein minimales $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ $\mu(K \setminus B) = 0$.
Falls überdies ∂K meßbar ist, so gilt die Äquivalenz:

$\nu \in \mathcal{M}^+(K)$ ist minimal $\Longleftrightarrow \nu(K \setminus \partial K) = 0$ (vgl. [9]-Th.3.3/Prop. 2.6).

6.) ${}^{\mathcal{F}}Rg$ ist als Infimum stetiger Funktionen oberhalbstetig und daher meßbar.
Ist $\mathcal{F}$ inf-stabil, $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ und $g : K \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, dann ist
- ${}^{\mathcal{F}}R_\mu g = \mu({}^{\mathcal{F}}Rg)$ (vgl. [9]-§ 1/S.475);
- ${}^{\mathcal{F}}R_\mu g = {}^{\hat{\mathcal{F}}}R_\mu g$, falls g oberhalbstetig und nach oben beschränkt ist (vgl. [9]-Cor. 1.3).

7.) Ist $\mathcal{F}$ inf-stabil, so ist $(K,\mathcal{F})$ simplizial genau dann, wenn für je zwei minimale Maße $\mu,\nu \in \mathcal{M}^+(K)$ gilt:
$\mu(h) = \nu(h)$ für $h \in \overline{\mathcal{F}} \Longrightarrow \mu(f) = \nu(f)$ für $f \in \mathcal{F}$ (vgl. [9]-Cor. 3.5).

4.8 Folgerung:

Für $A \subset K$ absorbierend und $f \in \hat{\mathcal{F}}$ gilt:
$f > 0$ auf $A \cap \partial K \Longrightarrow f > 0$ auf A.

Beweis:
Es ist $\overline{\mathcal{F}} = \hat{\mathcal{F}} \cap \mathcal{C}(K)$ ein inf-stabiler Kegel, der die Voraussetzungen (4.1) erfüllt und für den $\partial_{\overline{\mathcal{F}}} K = \partial_{\mathcal{F}} K$ ist.
Sei also $f \in \hat{\mathcal{F}}$, $A \subset K$ absorbierend und $f > 0$ auf $A \cap \partial K = A \cap \partial_{\overline{\mathcal{F}}} K = \partial_{\overline{\mathcal{F}}|_A} A$ (nach 4.7.2).
Dann ist $B := \{x \in A \mid f(x) > 0\} \supset \partial_{\overline{\mathcal{F}}|_A} A$ und B meßbar.
Zu $x \in A$ existiert ein $\overline{\mathcal{F}}|_A$-minimales Maß $\mu \prec_{\overline{\mathcal{F}}|_A} \varepsilon_x$; also gilt mit (4.7.5) $\mu(A \setminus B) = 0$, d.h. $\mu(B) > 0$, woraus folgt:
$f(x) \geq \mu(f|_A) = \int_B f|_A \, d\mu > 0$. □

Wir kommen zur Definition der Choquet-Topologie. Endliche Vereinigungen und beliebige Durchschnitte absorbierender Mengen sind absorbierend, also bilden die absorbierenden Mengen in K das System der abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf K, die gröber ist als die Ausgangstopologie.

4.9 Definition:

a) Die in (K,τ) von den $\mathcal{F}$-absorbierenden Mengen (als abge-

schlossenen Mengen) erzeugte Topologie heiße $\mathcal{F}$-(Choquet-) Topologie auf K und werde mit $\tau_{\mathcal{F}}$ bezeichnet.

b) Die Restriktion von $\tau_{\mathcal{F}}$ auf den Choquet-Rand $\partial_{\mathcal{F}}K$ heiße $\mathcal{F}$-(Choquet-)Topologie auf $\partial_{\mathcal{F}}K$ und werde mit $\tau_{\mathcal{F}}'$ bezeichnet.

c) Für $x \in K$ bezeichne $A_x \subset K$ die kleinste x enthaltende $\mathcal{F}$-absorbierende Menge, d.h. den $\tau_{\mathcal{F}}$-Abschluß von $\{x\}$ in K .

Falls Mißverständnisse ausgeschlossen sind, wird auch kurz von 'Choquet-Topologie' oder '$\mathcal{F}$-Topologie' gesprochen. Die Definition ist in Anlehnung an Boboc/Bucur [6] gewählt worden. Falls im folgenden von 'abgeschlossen', 'offen', etc. ohne Topologie-Angabe die Rede ist, ist stets die Ausgangs-Topologie gemeint.

Einige einfache Eigenschaften von Choquet-Topologien sind:

4.10 Lemma:

a) Stets ist $\tau_{\mathcal{F}} \subset \tau$, also auch $\tau_{\mathcal{F}}' \subset \tau|_{\partial K}$.

b) Ist $A \subset \partial_{\mathcal{F}}K$ abgeschlossen in K , so gilt:
(i) A ist $\tau_{\mathcal{F}}$-abgeschlossen in K ;
(ii) die Relativ-Topologien $\tau_{\mathcal{F}|_A}$ und $\tau|_A$ stimmen überein.

c) Ist $C \subset \partial_{\mathcal{F}}K$ $\tau_{\mathcal{F}}$-quasi-kompakt und ist $\tau_{\mathcal{F}}'$ separiert, so stimmen die Relativ-Topologien $\tau_{\mathcal{F}|_C}$ und $\tau|_C$ überein.

d) Ist $a \in \partial_{\mathcal{F}}K$ τ-isoliert in K , so genügen $K_1 := K \setminus \{a\}$, $\tau|_{K_1} =: \tau_1$ und $\mathcal{F}_1 := \mathcal{F}|_K$ den Voraussetzungen (4.1), und es gilt: $\partial_{\mathcal{F}_1}K_1 = \partial_{\mathcal{F}}K \setminus \{a\}$, $\tau_{1\mathcal{F}_1} = \tau_{\mathcal{F}|K_1}$, so daß $(\partial_{\mathcal{F}_1}K_1, \tau_{1\mathcal{F}_1}')$ und $(\partial_{\mathcal{F}}K \setminus \{a\}\ , \tau_{\mathcal{F}|\partial_{\mathcal{F}}K \setminus \{a\}})$ homöomorph sind als topologische Räume.

Beweis:
b) (i) Ist $A \subset \partial K$, so ist für $x \in A$, $\mu \prec \varepsilon_x$: $\mu = \varepsilon_x$, somit $\mathrm{Tr}\,\mu = \{x\} \subset A$.
(ii) Jede $\tau|_A$-abgeschlossene Menge $B \subset A$ ist auch τ-abgeschlossen, also wegen (i) $\tau_{\mathcal{F}}$-abgeschlossen und damit $\tau_{\mathcal{F}|_A}$-abgeschlossen.

c) Es ist C eine kompakte Menge in dem Hausdorff-Raum $(\partial K, \tau_{\mathcal{F}}')$, also ist C $\tau_{\mathcal{F}}'$-abgeschlossen und damit $\tau_{|\partial K}$-abgeschlossen. Analog wie in b)(ii) folgt, daß jede $\tau_{|C}$-abgeschlossene Menge $B \subset C$ auch $\tau_{|\partial K}$- und somit $\tau_{\mathcal{F}|C}$-abgeschlossen ist.

d) $\hat{c}K_1 = \partial K \setminus \{a\}$ folgt mit der Überlegung: "$\mu \in \mathcal{M}^+(K_1)$, $\mu \overset{\mathcal{F}_1}{\leq} \varepsilon_z$ impliziert für $f \in \mathcal{F}$ $\mu(f) = \mu(f|_{K_1})$, also $\mu \overset{\mathcal{F}}{\leq} \varepsilon_z$".
Da für A τ-abgeschlossen $A \setminus \{a\}$ τ-abgeschlossen ist, erhält man hieraus $\tau_{\mathcal{F}|K_1} = \tau_{\mathcal{F}_1}$. □

4.11 Lemma:

a) Für $f \in \hat{\mathcal{F}}$ ist $\partial_{\mathcal{F}} K \cap \{x \in K \mid f(x) \leq 0\}$ $\tau_{\mathcal{F}}'$-quasi-kompakt;

b) $(\partial_{\mathcal{F}} K, \tau_{\mathcal{F}}')$ ist quasi-kompakter Raum.

Beweis:

a) vgl. Boboc/Bucur [6]-L.2.

b) folgt aus a), da nach (4.1)(ii) ein $v \in \mathcal{F} \subset \hat{\mathcal{F}}$ existiert mit $v < 0$ auf K. □

4.12 Beispiele:

1.) In Beispiel (4.4.1) ist die $\mathcal{C}(K)$-Choquet-Topologie auf K die Ausgangs-Topologie.

2.) Falls in Beispiel (4.4.2) K Simplex ist, ist $\tau_{\mathcal{C}_2'(K)}$ gleich der fazialen Topologie auf $\mathrm{Ext}(K)$, was sich aus (4.4.2) mit [19]-Th.3.3 und dem Satz von Krein/Milman (vgl. [2]-I-1.3) ergibt.

3.) In Beispiel (4.4.3) gilt:
Falls $D = \overline{D}$ ist, stimmen nach (4.10.b) $\tau_{\mathcal{G}}'$ und $\tau_{|D}$ überein. Da in diesem Fall die Restriktion von $(V_\alpha)_{\alpha > 0}$ auf D eine Feller-Resolvente auf $(D, \tau_{|D})$ liefert, ist die durch $\mathcal{G}_{|D}$ auf $\mathcal{M}^+(D)$ erzeugte Ordnung gleich der durch $\mathcal{C}(D)$ erzeugten, und es liegt ein Spezialfall von Beispiel 1.) vor.

Falls D nicht abgeschlossen ist, so ist $\tau_{\mathfrak{F}|D}$ i.a. gröber als $\tau|_D$, wie sich in § 6 zeigt.
In den Beispielen (1.8) enthält wegen $Q_o(x,\,) \overset{\mathfrak{F}}{\prec} \varepsilon_x$ für $x \in K$ der $\mathfrak{F}$-Abschluß eines Branch-Punktes $b \in K$ jeweils den Träger des Maßes $Q_o(b,\cdot)$, d.h. umgekehrt, daß $\tau_{\mathfrak{F}}$-Umgebungen von Punkten $x \in \mathrm{Tr}Q_o(b,\cdot)$ jeweils Ray-offene Umgebungen von b enthalten.

Mit (4.10.c) folgt, daß $\tau_{\mathfrak{F}}' = \tau|_{\partial K}$ ist, falls $\tau_{\mathfrak{F}}'$ separiert ist, es gilt sogar die Äquivalenz:

4.13 Satz:

Unter der Voraussetzung

$$(*)\quad \begin{cases} A_x \cap \partial K \text{ ist mindestens zweipunktig für alle} \\ x \in \overline{\partial K} \setminus \partial K \\ \quad (\text{wo } A_x = \overline{\{x\}}^{\tau_{\mathfrak{F}}},\ \text{vgl. 4.9.c}) \end{cases}$$

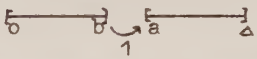
sind äquivalent:
(i) $\tau_{\mathfrak{F}}'$ ist separiert;
(ii) ∂K ist τ-abgeschlossen in K;
(iii) $\tau_{\mathfrak{F}}' = \tau|_{\partial K}$.

Beweis:
'(i) $\Rightarrow$ (ii)': Annahme: es gibt ein $x \in \overline{\partial K} \setminus \partial K$; dann existieren nach (*) zwei verschiedene Punkte $y, z \in A_x \cap \partial K$. Gemäß (i) gibt es disjunkte $\tau_{\mathfrak{F}}'$-offene Umgebungen U von y und V von z; dazu existieren $\tau_{\mathfrak{F}}$-abgeschlossene Mengen G und H so, daß $G \cap \partial K = \partial K \setminus U$ und $H \cap \partial K = \partial K \setminus V$ ist.
Also ist $\partial K = (\partial K \setminus U) \cup (\partial K \setminus V) = (G \cap \partial K) \cup (H \cap \partial K)$ und $x \in \overline{\partial K} \subset G \cup H$.
Sei z.B. $x \in G$ (sonst analog!), so ist $A_x \subset G$, also $y \in A_x \cap \partial K \subset G \cap \partial K = \partial K \setminus U$, im Widerspruch zur Wahl der Umgebung U von y.
'(ii) $\Rightarrow$ (iii)' mit (4.10.c);
'(iii) $\Rightarrow$ (i)', da $\tau|_{\partial K}$ separiert ist. □

4.14 Bemerkungen:

1.) (4.13) ist eine analoge Aussage, wie sie für die faziale Topologie bei Simplexen bekannt ist (vgl. [1]-II-7.6-7.8). Die hier benötigte Voraussetzung ist in diesem Spezialfall (vgl. Bsp.4.12.2) stets erfüllt, und der Beweis von (4.13) ist der analoge.

2.) Auf die Voraussetzung (*) kann nicht verzichtet werden, wie das Beispiel der gleichförmigen Bewegung mit einfachem Sprung über eine Lücke (d.h. mit 'degeneriertem' Branch-Punkt) und Kegel $\mathcal{F} := \mathcal{G}$ gemäß Beispiel (4.4.3) zeigt:



Choquet-offene Umgebungen von a enthalten stets ein Intervall $(b - \varepsilon, b]$, wohingegen rechtsseitige euklidische Umgebungen von a offen in der Ausgangs-Topologie sind; der Choquet-Rand ∂K ist nicht abgeschlossen, da $b \notin \partial K$; aber die Choquet-Topologie auf ∂K ist separiert.

Es zeigt sich, daß die Voraussetzung (*) aus (4.13) im allgemeinen weniger restriktiv ist als die von Boboc/Bucur angegebene:

4.15 Bemerkung:

Boboc/Bucur zeigen in [6] die Äquivalenzen aus (4.13) unter der Voraussetzung

(**) $\begin{cases} \text{für } x,y \in K,\ x \neq y \text{ existieren } s_1, s_2 \in \hat{\mathcal{F}} \text{ mit } s_1(x) > 0, \\ s_2(y) > 0 \text{ und } \{z \in K \mid s_1(z) > 0\} \cap \{z \in K \mid s_2(z) > 0\} = \emptyset \end{cases}$

(*) ist weniger restriktiv als (**), denn:

(i) Falls ein $x \in \overline{\partial K} \setminus \partial K$ existiert mit $A_x \cap \partial K = \{y\}$ für ein $y \in \partial K$, so gilt für jedes $s \in \hat{\mathcal{F}}$ mit $s(y) > 0$ (nach 4.8): $s > 0$ auf A_x; folglich ist (**) nicht erfüllt.

(ii) Es bezeichne $\mathcal{F}$ den Kegel der reellen stetigen monoton fallenden Funktionen auf einem kompakten Intervall $[a,b] =: K$ in $\mathbb{R}$; dieser genügt den Voraussetzungen (4.1); es ist

$\partial_{\leq} K = \{b\}$, so daß (*) trivialerweise erfüllt ist, aber nicht (**) ($\hat{\mathcal{F}}$ besteht aus den unterhalbstetigen nach unten beschränkten monoton fallenden Funktionen auf K) .

§ 5 Lokale Eigenschaften und Borel-Struktur

Es werden im folgenden Konvergenzeigenschaften der Choquet-Topologien im Verhältnis zur Ausgangs-Topologie und Beziehungen zwischen den Umgebungssystemen angegeben. Dieses dient zur Herleitung von äquivalenten Aussagen zur Existenz einer abzählbaren Basis für die Choquet-Topologie auf dem Choquet-Rand; als hinreichend hierfür erweist sich überdies die Lokal-Quasi-Kompaktheit der Choquet-Topologie. Diese Ergebnisse (5.2-5.10) sind in enger Anlehnung an Arbeiten von Gleit [22,23] erhalten worden, wo Analoges für Simplex-Räume etc. gezeigt wird.

Die Äquivalenz der Lokal-Quasi-Kompaktheit mit den übrigen Aussagen konnte im allgemeinen Rahmen nicht gezeigt werden, aber es ergibt sich aus § 6, daß sie im H-Kegel-Kontext als Spezialfall eines entsprechenden Ergebnisses von Gleit direkt folgt.

Zum Abschluß dieses Paragraphen wird untersucht, wie die (universelle) Borel-Struktur der Choquet-Topologie zusammenhängt mit der der Ausgangs-Topologie. Unter Voraussetzung der Lokal-Quasi-Kompaktheit der Choquet-Topologie erhält man die Gleichheit der Borel-Strukturen.

5.1 Bezeichnungen:

Es seien in diesem Paragraphen (K,τ) ein kompakter metrisierbarer (Hausdorff-)Raum mit Metrik d und $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K)$ wie unter (4.1); $\tau_{\mathcal{F}}$ bezeichne wie in (4.9) die $\mathcal{F}$-Choquet-Topologie auf K, $\tau_{\mathcal{F}}'$ deren Einschränkung auf den Choquet-Rand ∂K.

Für $x \in K$ seien $\mathcal{U}(x)$, bzw. $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}(x)$ die Umgebungsfilter von x in der Ausgangs- bzw. Choquet-Topologie; für $x \in Z \subset K$ seien ferner $\mathcal{U}|_Z(x)$, bzw. $\mathcal{U}_{\mathcal{F}|Z}(x)$ die entsprechenden Umgebungsfilter in den Relativtopologien auf Z.

Für $x \in K$ sei A_x wie unter (4.9) die kleinste x enthaltende absorbierende Menge, ferner sei für $z \in K$ $\psi(z) := \{x \in K \mid z \in A_x\}$ die Menge der Punkte, in deren

Choquet-Abschluß z liegt.

Begriffe wie offen, abgeschlossen, konvergent etc. ohne zusätzliche Topologie-Angabe beziehen sich stets auf den Raum (K,τ).

5.2 Lemma:

a) Für $x \in K$ ist $\mathcal{U}(x) \supset \bigcup_{z \in A_x} \mathcal{U}_{\tau_\mathcal{F}}(z)$.

b) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $x \in K$ konvergente Folge in ∂K, so sind äquivalent:

(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $\tau_\mathcal{F}$-konvergent gegen ein $z \in K$;

(ii) $z \in A_x$.

Beweis:

a) Es seien $z \in A_x$, $U \in \mathcal{U}_{\tau_\mathcal{F}}(z)$, und V bezeichne den Choquet-offenen Kern von U. Zu zeigen ist: $x \in V$. Andernfalls ist aber $A_x \subset \complement V$ im Widerspruch zu $z \in A_x \cap V$.

b) '(i) $\Rightarrow$ (ii)':

Wir betrachten o.B.d.A. nur den Fall, daß (x_n) nicht schließlich konstant ist. Dann existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von (x_n) mit $x_{n_k} \neq z$, $x_{n_k} \xrightarrow[k]{\tau} x$ und $x_{n_k} \xrightarrow[k]{\tau_\mathcal{F}} z$.

Die Menge $B := \{x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\} \cup A_x$ ist abgeschlossen und wegen $(x_{n_k}) \subset \partial K$ sogar absorbierend. Folglich ist $z \in B$, also nach Konstruktion $z \in A_x$.

'(ii) $\Rightarrow$ (i)' ist evident aus a) . □

5.3 Folgerungen:

a) (5.2a) ist äquivalent formulierbar im Kontext von Netzen (vgl. [26]-S.65ff):
Jedes gegen ein $x \in K$ konvergente Netz $(x_i)_{i\in I}$ in K ist Choquet-konvergent gegen jedes $z \in A_x$.

b) Ist $C \subset \partial K$ $\tau_\mathcal{F}$-quasi-kompakt, so gilt für jedes Element x im τ-Abschluß von C : $A_x \cap C \neq \emptyset$.

c) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $x \in K$ konvergente Folge in ∂K, so stimmen die Choquet-Konvergenz- und die Choquet-Häufungs-Punkte von (x_n) in K überein und sind gleich A_x.

d) Zu jeder gegen ein $z \in K$ Choquet-konvergenten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in ∂K existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $x \in \psi(z)$ konvergiert.

Beweis:
a) folgt aus der bekannten Korrespondenz von Filtern und Netzen (vgl. z.B. [26]-S.83-L(f)).

b) Ist $x \in \overline{C}$ und $x_n \xrightarrow{\tau} x$ mit $(x_n)_n \subset C \subset \partial K$, so existiert wegen der Quasi-Kompaktheit von C eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$, die gegen ein $z \in C$ $\tau_{\mathfrak{F}}$-konvergent ist (vgl. [26]-S.136-Th.2). woraus mit (5.2.b) $z \in A_x$ folgt.

c) folgt mit (5.2.b).

d) Wegen der Kompaktheit von (K,τ) existiert eine gegen ein $x \in K$ konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$, mit (5.2.b) folgt $z \in A_x$, also $x \in \psi(z)$. □

Die nachstehenden Sätze sind formuliert für Teilmengen Z von ∂K, ab (5.7) unter der zusätzlichen Voraussetzung: 'Z liege dicht in (K,τ)'. Der Grund hierfür liegt darin, daß die Ergebnisse angewendet werden sollen auf den Zustandsraum $E = D \setminus \{\Delta\}$, wo D Nicht-Branch-Punkt-Menge eines Ray-Prozesses mit $\overline{D} = K$ ist und $\Delta \in K$ nicht isoliert ist.

5.4 Lemma:
Es seien $Z \subset \partial K$, $z \in Z$ und $U \in \mathcal{U}_{\mathfrak{F}|Z}(z)$ $\tau_{\mathfrak{F}|Z}$-offen. Dann existiert eine offene Umgebung $V \in \mathcal{U}(\psi(z))$ von $\psi(z)$ mit $V \cap Z = U$.

Beweis:
Zu $U \in \mathcal{U}_{\mathfrak{F}|Z}(z)$ $\tau_{\mathfrak{F}|Z}$-offen existiert ein $U' \in \mathcal{U}_{\mathfrak{F}}(z)$ Choquet-offen in K mit $U' \cap Z = U$. Definiert man $V := \{x \in K \mid A_x \cap U' \neq \emptyset\}$, so ist $V \supset U'$ und $V \supset \psi(z)$, da $z \in U'$, und es ist $V \cap Z = \{x \in Z \mid \{x\} \cap U' \neq \emptyset\} = U' \cap Z = U$.

Da ferner jede gegen ein $x \in V$ konvergente Folge $\tau_{\mathcal{F}}$-konvergent ist gegen ein $y \in U'$, also schließlich in $U' \subset V$ liegt, ist V offen. □

5.5 Lemma:

Es seien $Z \subset \partial K$, $z \in Z$ und $\psi(z)$ abgeschlossen in (K,τ). Ferner seien $U \in \mathcal{U}_{\mathcal{F}|Z}(z)$ $\tau_{\mathcal{F}|Z}$-offen und für $\varepsilon > 0$

$U_\varepsilon := U_\varepsilon(z) := \{ y \in K \mid d(y, \psi(z)) < \varepsilon \}$, sowie $V_\varepsilon := V_\varepsilon(z)$ das $\tau_{\mathcal{F}|Z}$-Innere von $(U_\varepsilon \cap Z)$.

Dann gilt:

a) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $U_{1/n} \cap Z \subset U$.

b) Falls $z \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_{1/n}$ ist, so bildet $(V_{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\tau_{\mathcal{F}|Z}$-offene Umgebungsbasis für z.

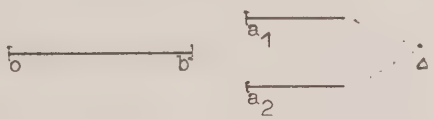
Beweis:

a) Zu $U \in \mathcal{U}_{\tau_{\mathcal{F}|Z}}(z)$ $\tau_{\mathcal{F}|Z}$-offen existiert nach (5.4) eine offene Umgebung $V \in \mathcal{U}(\psi(z))$ mit $V \cap Z = U$. Offenbar existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $d(\psi(z), \complement V) > \frac{1}{n}$, d.h. $\psi(z) \subset U_{1/n} \subset V$, also $U_{1/n} \cap Z \subset V \cap Z = U$.

b) folgt sofort mit a). □

5.6 Beispiel:

In Beispiel (1.8.2)



ist der $\mathcal{G}$-Choquet-Abschluß von $\{b\}$ in K:

$A_b = \{b, a_1, a_2\}$ (vgl. 4.12.3 bzw. 6.9.2),

ferner ist $\psi(a_j) = \{b, a_j\}$ kompakt (für $j = 1,2$).

Es seien (mit den Bezeichnungen aus 5.5)

$Z := \partial K = D = K \setminus \{b\}$, d die euklidische Metrik, $\varepsilon > 0$;

dann ist das $\tau_{\mathcal{F}|D}$-Innere $V_\varepsilon(a_j)$ der ε-Umgebung $U_\varepsilon(a_j)$ von $\psi(a_j)$:

$V_\varepsilon(a_j) = (b-\varepsilon,b) \cup [a_j,a_j+\varepsilon)$, und es ist $a_j \in V_\varepsilon(a_j)$.
Also bildet gemäß (5.5.b) $(V_{1/n}(a_j))_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare $\tau_{\mathcal{J}|D}$-offene Umgebungsbasis für a_j $(j = 1,2)$.
Die Mengen $[b-\frac{1}{n},b) \cup [a_j,a_j+\frac{1}{n})$ $(n\in\mathbb{N})$ bilden sogar eine quasi-kompakte Umgebungsbasis für a_j $(j = 1,2)$. Dazu beachte man, daß jedes gegen b euklidisch-konvergente Netz in D $\tau_{\mathcal{J}|D}$-konvergent ist gegen a_1 und gegen a_2 (vgl. 5.3a). $\tau_{\mathcal{J}|D}$-Umgebungsbasen der übrigen Punkte in D sind die üblichen euklidischen.

Die übrigen Beispiele werden in § 6 untersucht. Es wird sich zeigen, daß für (1.8.3) und (1.8.5a) nicht für alle Punkte eine abzählbare Umgebungsbasis in der jeweiligen $\mathcal{J}$-Choquet-Topologie existiert.

Die Beweise der nachfolgenden Sätze erfolgen mit den Vorbereitungen (5.2-5.5) analog den entsprechenden bei Gleit [22].

5.7 Satz:

Es sei $Z \subset \partial K$ und Z dicht in K . $z \in Z$ habe eine abzählbare $\tau_{\mathcal{I}|Z}$-Umgebungsbasis. Dann gilt:

a) Für jede Umgebung $W \in \mathcal{U}(\psi(z))$ ist z $\tau_{\mathcal{I}|Z}$-innerer Punkt in $W \cap Z$.

b) $\psi(z)$ ist abgeschlossen.

c) $(V_{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist abzählbare $\tau_{\mathcal{I}|Z}$-offene Umgebungsbasis für z (wobei V_ε wie unter 5.5 definiert sei).

Beweis:
Es sei $\{U_1 \supset U_2 \supset \dots\}$ $\tau_{\mathcal{I}|Z}$-offene Umgebungsbasis für z .

a) (vgl. [22]-2.1) Jede Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \in U_n \setminus (W \cap Z)$ enthält nach (5.3d) eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$, die gegen ein $x \in \psi(z)$ konvergiert.

b) (vgl. [22]-2.3) Seien $(x_n)_n \subset \psi(z)$ konvergent gegen $x \in K$ und $\{O_1 \supset O_2 \supset \dots\}$ eine offene Umgebungsbasis für x (o.B.d.A. so, daß $x_n \in O_n$ für $n \in \mathbb{N}$ ist). Dann existieren

mit (5.4) offene $V_i \in \mathcal{U}(\psi(z))$ mit $V_i \cap Z = U_i$ und es ist $(x_n)_n \subset V_i$ $(i \in \mathbb{N})$.

Es gibt somit eine Folge (y_n) mit $y_n \in (Z \cap V_n \cap \sigma_n) = U_n \cap \sigma_n$, die gegen x konvergiert und $\tau_{\mathcal{F}|Z}$-konvergent ist gegen z, also ist $x \in \psi(z)$ nach (5.2.c).

c) folgt mit a), b) und (5.5.b). □

5.8 Satz:

Es sei $Z \subset \partial K$ und Z dicht in K. Für $z \in Z$ ist äquivalent:

(1) Ist $(z_i)_{i \in I} \subset Z$ ein gegen z $\tau_{\mathcal{F}}$-konvergentes Netz, $(x_i)_{i \in I}$ ein gegen $x \in K$ konvergentes Netz und ist $z_i \in A_{x_i}$ (für $i \in I$), so ist $z \in A_x$.

(2) $\psi(z)$ ist abgeschlossen und $z \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_{1/n}(z)$ (Bezeichnungen aus 5.5).

(3) z hat eine abzählbare $\tau_{\mathcal{F}|Z}$-offene Umgebungsbasis.

Beweis (vgl. [22]-2.5):

'(1) $\Rightarrow$ (2)' : $\psi(z)$ abgeschlossen folgt trivial aus (1); falls $z \notin V_{1/n}$, so gibt es ein gegen ein $y \in K$ konvergentes und gegen z $\tau_{\mathcal{F}|Z}$-konvergentes Netz $(x_i)_{i \in I} \subset Z \setminus U_{1/n}$; mit (1) folgt $y \in \psi(z)$, also $d(x_i, \psi(z)) \xrightarrow{i} 0$ im Widerspruch zur Wahl der x_i.

'(2) $\Rightarrow$ (3)' nach (5.5.b).

'(3) $\Rightarrow$ (1)' : Nach (5.7.c) ist $(V_{1/n})_n$ eine Umgebungsbasis von z wie unter (3). Sind (z_i), (x_i), z, x gegeben wie unter (1), so lassen sich (wegen der abzählbaren Umgebungsbasen) Teilfolgen $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auswählen mit $z_n \in A_{x_n} \cap V_{1/n}$ und $z_n \xrightarrow{\tau_{\mathcal{F}|Z}} z$ und $x_n \xrightarrow{\tau} x$.

Gemäß (5.4) existiert für $n \in \mathbb{N}$ wegen $z_n \in V_{1/n}$ eine offene Umgebung $W_{1/n} \in \mathcal{U}(\psi(z_n))$ mit $W_{1/n} \cap Z = V_{1/n}$, also wegen (5.7.b) wie in (5.5.a) auch eine Umgebung $U_{\varepsilon(n)}(z_n)$ mit $U_{\varepsilon(n)}(z_n) \cap Z \subset W_{1/n} \cap Z = V_{1/n}$. Wegen der Dichtheit von Z in K

findet man eine Folge $(y_n)_n \subset Z$ mit
$d(y_n, x_n) < \delta(n) := \min(\varepsilon(n), 1/n)$.
Da $x_n \in \psi(z_n)$ ist, gilt $d(y_n, \psi(z_n)) < \delta(n)$,
also $y_n \in U_{\delta(n)}(z_n) \cap Z \subset U_{\varepsilon(n)}(z_n) \cap Z \subset V_{1/n}$.
Es folgt $y_n \xrightarrow{\tau} x$ und $y_n \xrightarrow{\tau_{\mathcal{F}|Z}} z$, so daß $z \in A_x$ aus (5.2.b) folgt. □

5.9 Folgerung:

Es sei $Z \subset \partial K$ dicht in K . Dann sind (1), (2), (3) aus (5.8), jeweils für jedes $z \in Z$ formuliert, äquivalent zu

(4) $(Z, \tau_{\mathcal{F}|Z})$ hat eine abzählbare $\tau_{\mathcal{F}|Z}$-offene Basis.

Beweis (vgl. [22]-2.5):
'(3) für alle $z \in Z \Rightarrow$ (4)': Es sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare offene Basis in K, ferner $U \neq \emptyset$ $\tau_{\mathcal{F}|Z}$-offen und $z \in U$.
Dann gibt es nach (5.4) eine offene Umgebung $V \in \mathcal{U}(\psi(z))$ von $\psi(z)$ mit $V \cap Z = U$. Zu $y \in \psi(z)$ sei jeweils $B_y \in \mathcal{B}$ so, daß $B_y \subset V$. Dann existiert mit (5.7.b) eine endliche Überdeckung $\bigcup_{i=1}^{m} B_{y_i}$ von $\psi(z)$. Gemäß (5.7.a) ist z $\tau_{\mathcal{F}|Z}$-innerer Punkt von $(Z \cap \bigcup_{i=1}^{m} B_{y_i}) \subset Z \cap V = U$. Folglich liefert das $\tau_{\mathcal{F}|Z}$-Innere der Mengen $Z \cap \bigcup_{\nu=1}^{m} B_\nu$ (für $n \in \mathbb{N}$, $B_\nu \in \mathcal{B}$) eine abzählbare $\tau_{\mathcal{F}|Z}$-offene Basis. □

5.10 Satz:

Es sei $Z \subset \partial K$ dicht in K, $z \in Z$ habe eine $\tau_{\mathcal{F}|Z}$-Umgebungsbasis aus quasi-kompakten Mengen in Z, dann besitzt z eine abzählbare $\tau_{\mathcal{F}|Z}$-offene Umgebungsbasis.

Beweis (vgl. [22]-3.3):
Gezeigt wird (5.8)(2):
(i) Annahme: es gibt ein $y \in \overline{\psi(z)} \setminus \psi(z)$. $U := Z \setminus A_y$ ist $\tau_{\mathcal{F}|Z}$-offene Umgebung von z, folglich existiert eine $\tau_{\mathcal{F}|Z}$-quasi-kompakte Umgebung $C \subset U$ von z. Zu dem $\tau_{\mathcal{F}|Z}$-Inneren G

von C gibt es gemäß (5.4) ein $V \in \mathcal{U}(\psi(z))$ mit $V \cap Z = G$; offenbar ist $y \in \overline{V}$. Wegen der Dichtheit von Z in K gibt es eine gegen y konvergente Folge $(x_n) \subset G \subset C$, also ist $y \in \overline{C}$ und mit (5.3.b) $A_y \cap C \neq \emptyset$ im Widerspruch zur Wahl von C.

(ii) Falls $z \notin V_{1/n}$, so existiert ein gegen z $\tau_{\mathfrak{F}|Z}$-konvergentes Netz $(z_i)_{i \in I}$ in $Z \setminus U_{1/n}$; dieses sei o.B.d.A. gegen $y \in K$ konvergent.

Falls $z \notin A_y$, so ist $z \in C \subset Z \setminus A_y$ für eine $\tau_{\mathfrak{F}|Z}$-quasi-kompakte Umgebung C von z , und $(z_i)_{i \in I}$ liegt schließlich in C. Wegen der Metrisierbarkeit von (K,τ) gibt es eine gegen y konvergente Teilfolge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C$, so daß (5.3.b) einen Widerspruch liefert.

Es folgt $z \in A_y$, d.h. $y \in \psi(z)$, so daß $(z_i)_{i \in I}$ schließlich in $U_{1/n}$ liegt im Widerspruch zur Wahl der z_i . □

5.11 Bemerkungen:

1.) Unter der Voraussetzung, daß eine Metrik d für τ existiert, so daß $-d(\cdot,A) \in \mathfrak{F}$ ist für absorbierende Mengen $A \subset K$, kann man (analog wie bei Gleit([22]-3.3) für $Z = \partial K$ die Umkehrung von (5.10) zeigen.

2.) Im Choquet-Simplex-Fall (vgl. 4.4.2) gilt für die faziale Topologie auf den Extremalpunkten gemäß Gleit ([22]-3.3) die Äquivalenz der Existenz einer abzählbaren (Umgebungs-)Basis (für jeden Extremalpunkt) und der Lokal-Quasi-Kompaktheit.

5.12 Beispiel:

Es seien gegeben eine Ray-Resolvente auf (K,τ) mit Nicht-Branch-Punkten D, wobei $\overline{D} = K$ sei, ferner seien $\Delta \in D$, $E := D \setminus \{\Delta\}$, $\mathcal{G} := \mathcal{C}_c^\infty + \mathbb{R}$ auf K und $\tau_{\mathcal{G}}$ die $\mathcal{G}$-Choquet-Topologie auf K , sowie $\tau_{\mathcal{G}}' := \tau_{\mathcal{G}}|_D$ $\tau_{\mathcal{G}}'' := \tau_{\mathcal{G}}|_E$.

Dann gelten

a) für den Raum $(D,\tau_{\mathcal{G}}')$;

b) für den Raum $(E,\tau_{\mathcal{G}}'')$

(jeweils anstelle (Z,τ_Z)) die Äquivalenzen aus (5.9), und

jede der Aussagen (1), (2), (3), (4) folgt aus der Lokal-Quasi-Kompaktheit der Topologie $\tau_{\mathcal{F}}'$ auf D (im Falle a), bzw. der Topologie $\tau_{\mathcal{F}}''$ auf E (im Falle b).

Denn:

a) ergibt sich sofort aus (5.9/5.10), da $D \subset K$ dicht ist.

b) Es seien $K_1 := K \setminus \{\Delta\}$, $\mathcal{F}_1 := \mathcal{F}|_{K_1}$ und $\tau_1 := \tau|_{K_1}$.

Falls Δ τ-isoliert ist in K, so erfüllen nach (4.10.d) (K_1, τ_1) und $\mathcal{F}_1$ die Voraussetzungen (4.1), und es ist $(\partial_{\mathcal{F}_1} K_1, \tau_{1\mathcal{F}_1}) \cong (E, \tau_{\mathcal{F}}'')$. Also folgt die Behauptung aus (5.9/5.10) für $Z := \partial_{\mathcal{F}_1} K_1 \subset K_1$ (dicht).

Falls Δ nicht τ-isoliert ist in K, so ist $E \subset D = \partial_{\mathcal{F}} K \subset K$, jeweils dicht. Also folgt die Behauptung aus (5.9/5.10) für $Z := E \subset K$ (dicht).

Zum Abschluß dieses Paragraphen wird die von der Choquet-Topologie auf ∂K erzeugte Borel-Struktur untersucht.

5.13 Bezeichnungen:

Es seien $\mathcal{L}_{\mathcal{F}} := \mathcal{L}(\partial K, \tau_{\mathcal{F}}^{\wedge})$; $\mathcal{L} := \mathcal{L}(\partial K, \tau|_{\partial K})$; $\mathcal{L}^u := \bigcap_{\mu \in M_+^1(\mathcal{L})} \mathcal{L}^{\mu}$ die universelle Vervollständigung von $\mathcal{L}$.

Ferner seien $\mathcal{K}(\partial K) := \{A \subset \partial K \mid A \ \tau\text{-kompakt}\}$; $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{K}(\partial K))$ und $\mathcal{R} := \{\mu \in M_+^1(\mathcal{A}) \mid$ für $B \in \mathcal{A}$: $\mu(B) = \sup\{\mu(A) \mid A \in \mathcal{K}(\partial K), A \subset B\}\}$ die Menge der von innen regulären Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{A}$.

Es bezeichne $\mathcal{A}^u := \bigcap_{\mu \in \mathcal{R}} \mathcal{A}^{\mu}$ und $\mathcal{A}^{\mu, \mathcal{L}^u}$ die μ-Vervollständigung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{L}^u$ (vgl. [5]-I.5.3ff) für $\mu \in M_+^1(\mathcal{L})$, $\mathcal{A}^{\mathcal{L}^u} := \bigcap_{\mu \in M_+^1(\mathcal{L})} \mathcal{A}^{\mu, \mathcal{L}^u}$ die universelle Vervollständigung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{L}^u$; analog $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{L}^u}$ die universelle Vervollständigung von $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ in $\mathcal{L}^u$.

5.14 Bemerkungen:

1.) Nach (4.10) ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{L}$; ferner gilt: $\mathcal{A}^{\mathcal{L}^u} \subset \mathcal{L}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{L}^u} \subset \mathcal{L}^u$.

2.) Nach [5]-I.5.4 gilt:
$A \in \mathfrak{A}^{\mathcal{L}^u} \Leftrightarrow$ für $\mu \in \mathcal{M}_1^+(\mathcal{L})$ gibt es $A_0 \in \mathfrak{A}$, $B_1, B_2 \in \mathcal{L}$ mit $A_0 \setminus B_1 \subset A \subset A_0 \cup B_2$ und $\mu(B_1) = 0 = \mu(B_2)$.

3.) Für $A \in \mathcal{K}(\partial K)$ ist $\mathcal{A} \cap A = \mathcal{L}(A, \tau|_A)$.

4.) Zu $\mu \in \mathcal{R}$ existiert eine eindeutige Fortsetzung $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}_1^+(\mathcal{L})$, d.h. $\tilde{\mu}|_{\mathfrak{A}} = \mu$, denn: $\mu|\mathcal{K}(\partial K)$ liefert eine positive, additive, wachsende, beschränkte Mengenfunktion auf $\mathcal{K}(\partial K)$ mit der zusätzlichen Eigenschaft: für jede absteigende Familie $(K_\alpha)_{\alpha \in A} \subset \mathcal{K}(\partial K)$: $\mu(\bigcap_\alpha K_\alpha) = \inf_\alpha \mu(K_\alpha)$, (was wegen 3.) mit dem Lemma von Cartan-Dini (vgl. [12]-I/3) folgt. Damit ergibt sich die Behauptung nach Bourbaki [11]-IX-3.1.

5.15 Satz:
Es ist $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{L}^u} = \mathcal{L}^u$.

Beweis:
Gezeigt wird: $\mathfrak{A}^u = \mathfrak{A}^{\mathcal{L}^u} = \mathcal{L}^u$:
Aus (5.14) folgt $\mathfrak{A}^u \subset \mathfrak{A}^{\mathcal{L}^u} \subset \mathcal{L}^u$. Ist $A \in \mathcal{L}^u$, $\mu \in \mathcal{R}$, so existieren nach (5.14.4) eine Fortsetzung $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}_1^+(\mathcal{L})$ und dazu A_1, $A_2 \in \mathcal{L}$ mit $A_1 \subset A \subset A_2$ und $\tilde{\mu}(A_2 \setminus A_1) = 0$. Da $\tilde{\mu}$ regulär ist auf $(\partial K, \mathcal{L})$, existieren Folgen $(K_n) \uparrow$ und $(L_n) \uparrow$ in $\mathcal{K}(\partial K)$ mit $B_1 := \bigcup_n K_n$, $B_2 := \bigcap_n \bigcup_n L_n$, $B_i \in \mathfrak{A}_i$ $(i=1,2)$ und $\tilde{\mu}(A_1 \setminus B_1) = 0 = \tilde{\mu}(B_2 \setminus A_2)$ und $B_1 \subset A_1 \subset A \subset A_2 \subset B_2$. Also ist $\mu(B_2 \setminus B_1) = \tilde{\mu}(B_2 \setminus B_1) = \tilde{\mu}(B_2 \setminus A_2) + \tilde{\mu}(A_2 \setminus A_1) + \tilde{\mu}(A_1 \setminus B_1) = 0$ und damit $A \in \mathfrak{A}^\mu$.

Über die Gleichheit der universellen Vervollständigungen in $\mathcal{L}^u$ hinaus hat man in Spezialfällen auch Gleichheit der Borel-σ-Algebren:

5.16 Satz:

Falls $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ separabel ist, so gilt $\mathcal{L}_{\mathcal{I}} = \mathcal{L}$.

Beweis:

Da $(\partial K, \tau_{|\partial K})$ polnisch ist, ferner $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ separiert (Punkte sind $\tau_{\mathcal{I}}'$-abgeschlossen), folgt die Aussage mit [14]-III.2.1, angewendet auf die identische Abbildung
$i : (\partial K, \mathcal{L}) \longrightarrow (\partial K, \mathcal{L}_{\mathcal{I}})$. □

5.17 Bemerkungen:

1.) $\mathcal{L}_{\mathcal{I}} = \mathcal{L}$, falls $(\partial K, \tau_{\mathcal{I}}')$ eine abzählbare Basis besitzt, also nach (5.10) speziell, wenn $\tau_{\mathcal{I}}'$ lokal-quasi-kompakt ist.

2.) $\mathcal{L}_{\mathcal{I}} = \mathcal{L}$, falls $(\partial K, \tau_{|\partial K})$ eine K_σ-Menge ist, denn:

sei $\partial K = \bigcup_n L_n$ (wo L_n τ-kompakt), dann ist $\mathcal{L}_{\mathcal{I}|L_m} \subset \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{L}_{\mathcal{I}|L_m} = \mathcal{L}_{|L_m}$, und für $B \in \mathcal{L}$ gilt:

$B = \partial K \cap B = \bigcup_n (L_n \cap B) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, da $L_n \cap \mathcal{L} \in \mathcal{L}_{\sigma|L_m}$ ist.

3.) Nach 1.) und (5.6) gilt in Beispiel (1.8.2) die Gleichheit der Borel-Strukturen der Ray- und der $\mathcal{J}$-Choquet-Topologie auf D .

§ 6 Die $\mathcal{G}$-Choquet-Topologie bei Ray-Resolventen

Es wird das Beispiel (4.4.3) des zu einer Ray-Resolvente gehörigen Kegels $\mathcal{G}_c^\infty + \mathbb{R} =: \mathcal{G}$ auf einem Kompaktum (K,τ) untersucht.

Mittels Techniken aus [6] wird gezeigt, daß sich die $\tau_{\mathcal{G}}$-abgeschlossenen Mengen in $D = \partial_{\mathcal{G}}K$ durch die Initialkerne der Ray-Halbgruppe beschreiben lassen.

Speziell für den SHK-Kontext ergibt sich die Gleichheit der Choquet- und der fazialen Topologie auf D.

Zum Abschluß dieses Kapitels gehen wir erneut auf die Beispiele (1.8) ein und tragen einige Eigenschaften der zugehörigen $\mathcal{G}$-Topologien zusammen.

Es sei im folgenden wie in Beispiel (4.4.3)/(4.12.3) $(V_\alpha)_{\alpha>0}$ eine markovsche Ray-Resolvente auf einem kompakten metrischen Raum (K,τ) mit Ray-Halbgruppe $(Q_t)_{t\geq 0}$ und Nicht-Branch-Punkten D, ferner sei $\mathcal{G} := \mathcal{G}_c^\infty + \mathbb{R}$ auf K. $\tau_{\mathcal{G}}$ bezeichnet wie bisher die $\mathcal{G}$-Choquet-Topologie auf K und $\tau_{\mathcal{G}}'$ deren Einschränkung auf $\partial_{\mathcal{G}}K$.

Nachfolgend sind einige Eigenschaften von (K,τ) zusammengefaßt:

6.1 Bemerkungen:

1.) $\mathcal{G}$ ist inf-stabil, da
$\inf((s-a),(t-b)) = \inf(s+b,t+a) - (a+b)$ ist. Daher gelten für $(K,\mathcal{G})$ die Aussagen aus (4.7.1-4.7.7).

2.) $\partial_{\mathcal{G}}K = D$ ist polnisch (vgl. 1.2.3), also meßbar; daher folgt mit (4.7.5), daß genau die minimalen Maße in $\mathcal{M}^+(K)$ von D getragen werden.

3.) Nach (4.7.6) gilt für $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ und $g : K \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$:
$\mu(\overset{\vee}{R}g) = \inf\{u(s) \mid s \in \mathcal{G},\ s \geq g\}$; überdies, falls $g = 1_F$ für eine abgeschlossene Menge $F \subset K$:
$\mu(\overset{\vee}{R}1_F) = \inf\{\mu(s) \mid s \in \hat{\mathcal{G}},\ s \geq 1_F\}$.

4.) Da für $x \in K$ $Q_0(x,\cdot) \mathfrak{F} \varepsilon_x$ ist, gilt für $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$: $\mu Q_0 \mathfrak{F} \mu$, also für $\mathfrak{F}$-minimale Maße $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$: $\mu Q_0 = \mu$.

5.) Für $s \in \mathcal{F}_c^\alpha$ ist $Q_0 s = \sup_\beta \beta V_{\alpha+\beta} s$ mit $\beta V_{\alpha+\beta} s \in \mathcal{E}_c^\alpha$, also $Q_0 s \in \mathcal{C}_\ell(K) \cap \mathcal{E}^\alpha$.

6.) Da $\pm 1 \in \mathfrak{F}$ ist, sind die Konstanten $\mathfrak{F}$-affin.

7.) Nach (4.5.b) sind die unterhalbstetigen α-exzessiven Funktionen $\mathfrak{F}$-affin (für $\alpha \geq 0$), also enthalten die stetigen $\mathfrak{F}$-affinen Funktionen $\mathcal{E}_c^\infty$.

6.2 Satz:
$(K,\mathfrak{F})$ ist simplizial (vgl. 4.3.f), und zu jedem $x \in K$ ist $Q_0(x,\cdot)$ das eindeutige minimale Maß unterhalb ε_x .

Beweis:
Es seien $\mu,\nu \in \mathcal{M}^+(K)$ minimale Maße mit $\mu(h) = \nu(h)$ für $h \in \mathfrak{F}$. Wegen $\mathfrak{F} \supset \{h \in \mathcal{C}(K) \mid h \text{ } \mathfrak{F}\text{-affin}\} \supset \mathcal{E}_c^\infty$ (vgl. 4.3.e; 6.1.7) gilt mit (6.1.4/5) für $f \in \mathcal{F}_c^\alpha$ $(\alpha \geq 0)$:
$\mu(f) = \mu(Q_0 f) = \sup_\beta \mu(\beta V_{\alpha+\beta} f) = \sup_\beta \nu(\beta V_{\alpha+\beta} f) = \nu(Q_0 f) = \nu(f)$.
Aus (6.1.1/6;4.7.7) folgt somit, daß $(K,\mathfrak{F})$ simplizial ist.
Wegen $Q_0(x,D) = 1$ ist $Q_0(x,\cdot)$ nach (6.1.2) minimal; überdies ist $Q_0(x,\cdot) \prec \varepsilon_x$, also nach Obigem eindeutiges minimales Maß unterhalb ε_x . □

Im allgemeinen ist zur Bestimmung der absorbierenden Mengen die Bestimmung aller Maße unterhalb von Punktmassen erforderlich. Im Fall von $(K,\mathfrak{F})$ lassen sich zumindest die $\tau_{\mathfrak{F}}$-abgeschlossenen Mengen in ∂K mittels der Familie $(Q_0(x,\cdot))_{x \in K}$ beschreiben.

Dazu wird zunächst der Begriff 'Balayage-Menge' definiert; die Benennung ist Boboc/Bucur [6] entnommen; wie man sich überlegt, stimmt für den hier betrachteten Spezialfall $(K,\mathfrak{F})$ die dortige Definition mit der folgenden überein:

6.3 Definition:
Eine abgeschlossene Menge $F \subset K$ heißt Balayage-Menge, falls

für jedes $x \in F$ $\mathrm{Tr}Q_o(x,\cdot) \subset F$ ist.

6.4 Bemerkungen:

1.) Trivialerweise ist jede absorbierende Menge Balayage-Menge.

2.) Ist $F \subset K$ Balayage-Menge und $s \in \mathcal{S}_c^\infty$, so gilt:

$s \geq 1_F \iff Q_o s \geq 1_F$;

denn: falls $s \geq 1_F$ ist, gilt für $x \in F$:

$$Q_o s(x) \geq Q_o 1_F(x) = Q_o 1(x) = 1 = 1_F(x) .$$ □

Es bezeichne im weiteren für $g : K \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $Rg := \mathcal{S}Rg$.

6.5 Satz:

Ist $F \subset K$ Balayage-Menge, so ist $R1_F$ $\mathcal{S}$-affin.

Beweis:

Es ist $R1_F \geq o$ und meßbar (vgl. 4.7.6). Es seien $\mu, \nu \in \mathcal{M}^+(K)$ mit $\mu \prec \nu$. Dann gilt trivialerweise $\mu(R1_F) \leq \nu(R1_F)$. Ferner gilt:

$$\begin{aligned}
\mu(R1_F) &= \inf\{\mu(s) \mid s \in \mathcal{S}_c^\infty,\ s \geq 1_F\} && \text{(vgl. 6.1.3)}\\
&\geq \inf\{\mu Q_o(s) \mid s \in \mathcal{S}_c^\infty,\ s \geq 1_F\}\\
&= \inf\{\mu Q_o(s) \mid s \in \mathcal{S}_c^\omega,\ Q_o s \geq 1_F\} && \text{(vgl. 6.4.2)}\\
&= \inf\{\nu Q_o(s) \mid s \in \mathcal{S}_c^\infty,\ Q_o s \geq 1_F\} && \text{(vgl. 6.1.5/7)}\\
&\geq \inf\{\nu(s) \mid s \in \mathcal{E}^\infty \cap \mathcal{P}_c(K),\ s \geq 1_F\} && \text{(vgl. 6.1.5)}\\
&\geq \inf\{\nu(s) \mid s \in \mathcal{S},\ s \geq 1_F\} && \text{(vgl. 6.1.7;4.3.d/e)}\\
&= \nu(R1_F) && \text{(vgl. 6.1.3).}
\end{aligned}$$ □

Wir bezeichnen für eine abgeschlossene Menge $F \subset K$ mit $B(F)$ die Menge $\{x \in K \mid R1_F(x) = 1\}$.

6.6 Lemma:

Es sei $F \subset K$ abgeschlossen, dann gilt:

a) $F \subset B(F)$;

b) $B(F) = \{x \in K \mid \exists\, \mu \in \mathcal{M}^+(K)$ mit $\mu \prec \varepsilon_x$ und $\mathrm{Tr}\mu \subset F\}$;

c) $F \cap \partial_g K = B(F) \cap \partial_g K$;

d) ist F Balayage-Menge, so ist $B(F)$ absorbierend.

Beweis:

a) Für $x \in F$ ist $1 \geq R1_F(x) = 1_F(x) = 1$.

b) "$\supset$": Ist $x \in K$, $\mu \prec \varepsilon_x$ mit $\mu(K \setminus F) = 0$, so ist $1 \geq R1_F(x) \geq \mu(R1_F) = \mu(1) = 1$.

"$\subset$": Nach (4.7.4) existiert zu der oberhalbstetigen Funktion 1_F ein $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$, $\mu \prec \varepsilon_x$ mit $R1_F(x) = \mu(1_F)$, also gilt: $\mu(1_F) \leq \mu(1) = 1 = R1_F(x) = \mu(1_F)$, d.h. $\mathrm{Tr}\mu \subset F$.

c) Es sei $x \in B(F) \cap \partial_g K$ und $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ mit $\mu \prec \varepsilon_x$, $\mu(F) = 1$ gemäß b). Dann ist $\mu = \varepsilon_x$, da $x \in \partial_g K$, also $\varepsilon_x(F) = 1$, d.h. $x \in F$. Mit a) folgt die Behauptung.

d) Es sei F Balayage-Menge; $x \in B(F)$, $\mu \prec \varepsilon_x$. Nach (6.5) ist $R1_F$ $\mathcal{G}$-affin, also gilt:
$\mu(R1_F) = R1_F(x) = 1 = \mu(1)$ also $\mu(1 - R1_F) = 0$, d.h. $\mathrm{Tr}\mu \subset \{R1_F = 1\} = B(F)$. □

Mit diesen Vorbereitungen läßt sich die angekündigte Charakterisierung der τ_g'-abgeschlossenen Mengen herleiten:

6.7 Satz: Eine in $\partial_g K$ relativ-abgeschlossene Menge $A \subset \partial_g K$ ist τ_g'-abgeschlossen genau dann, wenn der τ-Abschluß $\overline{A}$ von A in K Balayage-Menge ist.

Beweis:

'$\Leftarrow$': Es ist $A = \overline{A} \cap \partial K$, und nach (6.6.d) $B(\overline{A})$ absorbierend mit $A = \overline{A} \cap \partial K = B(\overline{A}) \cap \partial K$.

'$\Rightarrow$': Es ist $A = F \cap \partial K$, wobei $F \subset K$ absorbierend: dann gilt auch $A = \overline{A} \cap \partial K$, und für $x \in \overline{A}$ ist:
$Q_0(x, \overline{A}) = Q_0(x, \overline{A} \cap \partial K) = Q_0(x, F \cap \partial K) = Q_0(x, F) = 1$, also $\mathrm{Tr}Q_0(x, \cdot) \subset \overline{A}$, da $\overline{A}$ abgeschlossen. □

Da die Maße $Q_0(x, \cdot)$ auf $D = \partial K$ leben, ergibt sich hieraus:

6.8 Folgerung:

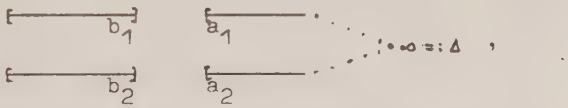
Eine universell meßbare Menge $A \subset \partial K$ ist $\tau_{\mathcal{F}}$-abgeschlossen genau dann, wenn für $x \in \overline{A}$ $Q_o(x,A) = 1$ ist. □

6.9 Bemerkungen:

1.) Mit der Charakterisierung (6.7/8) der $\mathcal{F}$-Choquet-Topologie auf D erhält man einige Ergebnisse über Konvergenzeigenschaften etc., auch direkt ohne den Apparat aus §§ 4/5.

2.) In (5.6) wurde für Beispiel (1.8.2) $A_b = \{b, a_1 a_2\}$ angegeben. Ersichtlich ist $\{b, a_1, a_2\}$ Balayage-Menge und $K \setminus \{b, a_1, a_2\} \subset \partial K$, so daß aus (6.6.b/d) die Behauptung folgt.

3.) Im allgemeinen ist $F \neq B(F)$, auch falls F Balayage-Menge ist: man betrachte den Prozeß der 'gleichförmigen (Parallel-)Bewegung nach rechts' auf der folgenden kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^2_\Delta$:



wobei b_i Branch-Punkte seien mit identischem Branch-Verhalten, und zwar sei $Q_o(b_i, \cdot) = \frac{1}{2}(\varepsilon_{a_1} + \varepsilon_{a_2})$ für $i = 1,2$. Dann ist $F := \{b_2, a_1, a_2\}$ Balayage-Menge, und nach (6.6.b) ist $b_1 \in B(F) \setminus F$, da $Q_o(b_2, \cdot) \prec \varepsilon_{b_1}$.

In diesem Fall trennt allerdings $\mathcal{E}^\infty_c$ nicht die Punkte b_1 und b_2.

Möglicherweise sind unter einer solchen Zusatz-Voraussetzung Balayage-Mengen immer schon absorbierend.

Gemäß § 3 treten im H-Kegel-Kontext starke markovsche Ray-Resolventen auf, deren Nicht-Branch-Punkte genau die Extremalpunktmenge eines Choquet-Simplexes bilden. Es stellt sich die Frage, in welchem Zusammenhang die zugehörige faziale Topologie mit der hier definierten $\mathcal{F}$-Topologie steht.

Es seien dazu wie in (3.8) $K := \overline{E} \cup \{0\}$ für einen SFHK S auf gesättigter Menge E, $(\widetilde{V}_\alpha)$ (bzw. $(\widetilde{Q}_t)$) die zugehörige markovsche starke Ray-Resolvente (bzw. -Halbgruppe) auf K und $D = E \cup \{0\} = \operatorname{Ext} \Sigma_1$ für das Simplex $\Sigma_1 \subset S^*$; ferner bezeichnen τ_{faz} die faziale Topologie auf $\operatorname{Ext} \Sigma_1$, $\mathcal{J} := \mathcal{J}_c^\infty + \mathbb{R}$ auf K, $\tau_{\mathcal{J}}$ die $\mathcal{J}$-Choquet-Topologie, $\tau_{\mathcal{J}}' := \tau_{\mathcal{J}}|_D$, $\tau_{\mathcal{J}}'' := \tau_{\mathcal{J}}|_E$.

6.10 Lemma:

Für $x \in K$ gilt:

a) Ist $\mu \prec_{\mathcal{J}} \varepsilon_x$, so ist μ Darstellungsmaß für x, d.h. $\mu(f) = f(x)$ für alle auf Σ_1 stetigen affinen Funktionen f.

b) $\widetilde{Q}_0(x,\cdot)$ ist das eindeutige minimale Darstellungsmaß für x.

Beweis:

a) Wegen $\widetilde{S}_0|_K \subset \mathcal{J}_c^\infty$ ist $\mu(\widetilde{s}) = \widetilde{s}(x)$ für $s \in S_0$ (gemäß 4.5.b). μ hat einen Schwerpunkt $y \in \Sigma_1$, für den gilt: $\widetilde{s}(y) = \mu(\widetilde{s}) = \widetilde{s}(x)$ für $s \in S_0$, weswegen $y = x$ folgt (vgl. 3.3.4), also μ Darstellungsmaß für x ist.

b) Ist $\mu_x \in \mathcal{M}_1^+(\operatorname{Ext} \Sigma_1)$ das eindeutige minimale Darstellungsmaß für x, dann gilt für $\mu_x' := \mu_x|_E : \mu_x'(\widetilde{s}) = \mu_x(\widetilde{s}) = \widetilde{s}(x) = \widetilde{Q}_0 \widetilde{s}(x) = \widetilde{Q}_0(x,\cdot)|_E(\widetilde{s})$, also mit (3.3.6) $\mu_x' = \widetilde{Q}_0(x,\cdot)|_E$, und somit für die markovschen Fortsetzungen: $\mu_x = \widetilde{Q}_0(x,\cdot)$. □

6.11 Satz:

a) Ist $A \subset K$ $\mathcal{J}$-absorbierend, so ist

(i) $\overline{\operatorname{conv}}\, A$ Seite in Σ_1;

(ii) $\overline{\operatorname{conv}}\, (A \cup \{0\})$ Seite in Σ_1.

b) Ist $F \subset \partial_{\mathcal{J}} K = E \cup \{0\}$ $\tau_{\mathcal{J}}'$-abgeschlossen, so ist $F = T \cap \partial_{\mathcal{J}} K$ für eine abgeschlossene Seite T in Σ_1.

c) Ist $F \subset E$ $\tau_{\mathcal{J}}''$-abgeschlossen, so ist $F = T \cap E$ für eine abgeschlossene Seite T in Σ_1 mit $0 \notin T$.

(Dabei kürze 'conv' die konvexe Hülle ab.)

Beweis:

a) Da A absorbierend ist, enthält A mit jedem Punkt $x \in A$ auch den Träger des Darstellungsmaßes $\tilde{Q}_0(x,\cdot)$ (vgl. 6.10.b), daher gilt nach einem Satz von Effros ([19]-Th.3.3): $\overline{\text{conv}}\, A$ ist Seite in Σ_1. Analoges gilt für $A \cup \{0\}$, da ε_0 das Darstellungsmaß für 0 ist.

b) Es gibt eine $\mathcal{G}$-absorbierende Menge $A \subset K$ mit $A \cap \partial_{\mathcal{G}} K = F$, und nach a) ist $\overline{\text{conv}}\, A =: T$ Seite in Σ_1. Nach dem Satz von Krein/Milman (vgl. [2]-I-1.3) gilt dann $F \supset \text{Ext}(T) = T \cap \text{Ext}(\Sigma_1) = T \cap (E \cup \{0\})$, woraus $T \cap \partial_{\mathcal{G}} K \subset F$ folgt. Umgekehrt gilt stets:
$F = A \cap \partial_{\mathcal{G}} K \subset \overline{\text{conv}}\, A \cap \partial_{\mathcal{G}} K$. Also ist $T \cap \partial_{\mathcal{G}} K = F$.

c) Es gibt eine $\mathcal{G}$-absorbierende Menge $A \subset K$ mit $A \cap E = F$ und $T := \overline{\text{conv}}\, (A \cup \{0\})$ ist Seite in Σ_1 (nach a)). Mit Krein/Milman folgt $\text{Ext}\, T \subset \overline{A \cup \{0\}} = A \cup \{0\}$ also $T \cap E \subset T \cap \text{Ext}\, \Sigma_1 = \text{Ext}\, T \subset A \cup \{0\}$ und wegen $0 \notin E$ sogar: $T \cap E \subset A$. □

6.12 Folgerungen:

Mit den obigen Bezeichnungen gilt bei SFHK:

a) $\tau_{faz} = \tau_{\mathcal{G}}'$, d.h. die faziale und die $\mathcal{G}$-Choquet-Topologie auf $D = E \cup \{0\} = \text{Ext}\, \Sigma_1$ stimmen überein;

b) die Einschränkungen dieser Topologien auf E stimmen überein mit der strukturellen Topologie $\tau_{str|E}$ auf E (vgl. 0.5), d.h.: $\tau_{\mathcal{G}}'' = \tau_{faz|E} = \tau_{str|E}$.

c) $A \subset \text{Ext}\, \Sigma_1$ ist τ_{faz}-abgeschlossen genau dann, wenn für $x \in \overline{A} \subset K$ und das minimale Darstellungsmaß $\mu_x (= \tilde{Q}_0(x,\cdot))$ gilt: $\mu_x(A) = 1$.

Beweis:

a) Nach (6.11.b) ist $\tau_{\mathcal{G}}' \subset \tau_{faz}$. Ferner ist für eine τ_{faz}-abgeschlossene Menge $A \subset \text{Ext}\, \Sigma_1$: $A = T \cap \text{Ext}\, \Sigma_1$ für eine abgeschlossene Seite T in Σ_1. Dann ist $F := T \cap K$ $\mathcal{G}$-absorbierend, denn: für $x \in F$ ist nach (6.9.a) jedes

$\mu \in \mathcal{M}^+(K)$ mit $\mu \prec_{\mathcal{E}} \varepsilon_x$ Darstellungsmaß, also ist, da T Seite, $\mathrm{Tr}_\mu \subset T \cap K = F$.

b) Es ist mit a) $\tau_{str}|E \subset \tau_{faz}|E = \tau_{\mathcal{E}}''$, und aus (6.11.c) folgt $\tau_{\mathcal{E}}'' \subset \tau_{str}|E$.

c) folgt mit a) aus (6.8). □

Wir wenden uns abschließend erneut den Beispielen (1.8) zu. Mittels der Charakterisierung $\tau_{\mathcal{E}}'$-abgeschlossener Mengen aus (6.7) können wir - in Ergänzung der Bemerkungen unter (4.12.3) - jeweils $\tau_{\mathcal{E}}'$-Umgebungssysteme für Punkte aus E angeben. Speziell interessiert im Hinblick auf Kapitel III die Frage nach der Existenz von $\tau_{\mathcal{E}}'$-quasi-kompakten Umgebungsbasen, womit wir an Ergebnisse des Paragraphen 5 anknüpfen. Wir benutzen jeweils die Bezeichnungen aus (1.8).

6.13 Beispiele:

1.) In den Beispielen (1.8.1/1.8.2/1.8.4) ist die $\mathcal{E}$-Topologie $\tau_{\mathcal{E}}'$ auf $D = \partial_{\mathcal{E}} K$ jeweils lokal-quasi-kompakt.

a) Zu Beispiel (1.8.2) wurde in (5.6) für die interessierenden Punkte $a_j (j = 1,2)$ eine $\tau_{\mathcal{E}}'$-quasi-kompakte Umgebungsbasis angegeben, und zwar für $n \in \mathbb{N}$ die Mengen:
$\left[b-\frac{1}{n}, b\right) \cup \left[a_j, a_j+\frac{1}{n}\right]$.
Für die übrigen Punkte bilden jeweils die abgeschlossenen euklidischen 1/n-Kugeln eine $\tau_{\mathcal{E}}'$-quasi-kompakte Umgebungsbasis.
Es folgt speziell, daß sich die Punkte $a_j (j=1,2)$ nicht $\tau_{\mathcal{E}}'$-separieren lassen.

b) In (1.8.1) gilt Ensprechendes wie unter a), wenn man a_1 und a_2 geeignet durch a und Δ ersetzt.

c) In (1.8.4) - wo ∞ Branch-Punkt ist mit einer Branch-Verteilung $Q_o(\infty,\cdot) = \sum_{n \in \mathbb{N}_o} a_n \varepsilon_n =: \nu$ - enthalten $\tau_{\mathcal{E}}$-Umgebungen der Punkte $n \in \mathbb{N}_o$ mit $a_n > 0$ jeweils für ein $k_o \in \mathbb{N}_o$ ein Endstück $\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq k_o\} \cup \{\infty\}$; für diese Punkte bildet $\{n\} \cup \{k \mid k \geq k_o\} \mid k_o \in \mathbb{N}_o\}$ eine $\tau_{\mathcal{E}}'$-quasi-kompakte Umgebungs-

basis. Für die übrigen $n \in \mathbb{N}_o$ (mit $a_n = o$) ist $\{n\}$ $\tau_{\mathcal{G}}'$-offen und $\tau_{\mathcal{G}}'$-quasi-kompakt.

2.) In Beispiel (1.8.5.b) ist wegen $D = \overline{D}^{\tau_{\mathcal{G}}'} = \tau$ kompakt (vgl. 4.12.3).

3.) In den Beispielen (1.8.3) und (1.8.5.a) existieren jeweils nicht für alle Punkte $x \in E$ abzählbare $\tau_{\mathcal{G}}'$-offene Umgebungsbasen, denn:
In (1.8.3) enthält für $i \in \mathbb{N}$: A_{b_i} die Menge $\{a_1, a_2\}$, so daß $\psi(a_1) = \{x \in K \mid a_1 \in A_x\} = \{b_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{a_1\}$ nicht kompakt ist, also besitzt (gemäß 5.8 für $Z := D \setminus \{\Delta\} \subset K$ dicht) a_1 keine abzählbare $\tau_{\mathcal{G}}''$-offene Umgebungsbasis.
Analog enthält in (1.8.5.a) für alle $z \in H_o$ A_z die Menge H_1, so daß für $w \in H_1$ $\psi(w) = H_o \cup \{w\}$ nicht kompakt ist, weshalb kein $w \in H_1$ eine abzählbare $\tau_{\mathcal{G}}''$-offene Umgebungsbasis besitzt.
Folglich existieren auch jeweils keine abzählbaren $\tau_{\mathcal{G}}'$-offenen Umgebungsbasen, weshalb gemäß (5.10) in (1.8.3) und (1.8.5.a) weder $(D, \tau_{\mathcal{G}}')$ noch $(D \setminus \{\Delta\}, \tau_{\mathcal{G}}'')$ lokal-quasi-kompakt sind.

In (1.8.3) sind $\tau_{\mathcal{G}}'$-offene Umgebungen von a_1 :
$[a_1, a_1+\varepsilon) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (b_n - \delta_n, b_n)$;
von a_2 : $(a_2-\varepsilon, a_2+\varepsilon) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (b_n - \delta_n, b_n)$, wobei $\delta_n, \varepsilon > o$;
alle übrigen Punkte in D haben die üblichen (relativen) $\mathbb{R}^2$-Umgebungssysteme.

In (1.8.5.a) sind $\tau_{\mathcal{G}}'$-offene Umgebungen von $z \in H_1$:
$(U(z) \cup \bigcup_{w \in H_o} U(w)) \cap \{(x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mid u \notin [u_o, u_1)\}$, wobei $U(z)$, bzw. $U(w)$ jeweils euklidische $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$-Umgebungen von z , bzw. w sind; alle übrigen Punkte in D haben die üblichen (relativen) $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$-Umgebungssysteme.

4.) Man überlegt sich ferner, daß in allen Beispielen $\mathcal{E}_c^\alpha$ punktetrennend ist $(\alpha > o)$.

Kapitel III Choquet-Lokalisierung bei Rechts-Prozessen

§ 7 Ray-Prozesse in der $\mathcal{G}$-Topologie auf D

Es werden im folgenden Ray-Prozesse auf den Nicht-Branch-Punkten D von Ray-Resolventen betrachtet. Diese haben in der $\mathcal{G}$-Choquet-Topologie $\tau_{\mathcal{G}}$ auf D rechtsstetige Pfade mit Linkslimiten in D und sind quasilinksstetig bzgl. $\tau_{\mathcal{G}}$. Zur Herleitung dieser Eigenschaften sind Ergebnisse zum Verhalten von Ray-Prozessen nötig, die zu Beginn aus Getoor [21] zitiert werden.

Es sei in diesem Paragraphen $(V_\alpha)_{\alpha>0}$ eine markovsche Ray-Resolvente auf einem kompakten metrischen Raum (K,τ) mit Nicht-Branch-Punkt-Menge D . O.B.d.A. (vgl. 1.2.4) existiere ein absorbierender Punkt $\Delta \in D$, d.h. es ist $\alpha V_\alpha(\Delta,\cdot) = \varepsilon_\Delta$ für $\alpha > 0$. Die zugehörige Ray-Halbgruppe sei $(Q_t)_{t\geq 0}$, und zu $\mu \in \mathcal{M}_1^+(K)$ bezeichne $Y^\mu := (W, \mathcal{F}^\mu, \mathcal{F}_t^\mu, Y_t, \Theta_t, P^\mu)$ die Daten eines gemäß (1.3) zugehörigen Ray-Prozesses (mit den P^μ-vervollständigten σ-Algebren $\mathcal{F}^\mu, \mathcal{F}_t^\mu$) .

$\mathcal{G}$ sei wiederum der Kegel $\mathcal{J}_c^\infty + \mathbb{R}$ auf K , $\tau_{\mathcal{G}}$ (bzw. $\tau_{\mathcal{G}}'$) die damit assoziierte Choquet-Topologie auf K (bzw. $D = \partial_{\mathcal{G}} K$) (vgl. § 6).

7.1 Bemerkungen:

1.) Nach (1.3.1) hat Y^μ rechtsstetige Pfade in D (für $t \in \mathbb{R}_+$) , die (für $t \in [0,\infty)$) Linkslimiten in K besitzen. Also existieren zu jeder $(\mathcal{F}_t^\mu)$-Stopzeit T auf $\{T < \infty\}$ die Linkslimiten Y_{T-} in K .
Dabei ist für $w \in W$: $Y_{T-}(w) := \lim\{ Y_t(w) \mid t \nearrow T(w),\ t < T(w)\}$.

2.) Nach [21]-Th.5.8 ist Y^μ stark markovsch, und α-exzessive Funktionen sind nahezu Borelsch (d.h. $\mathcal{E}^\alpha \subset \mathcal{B}^n(K)$) .

3.) Nach Einschränkung der möglichen Startmaße auf $(D, \mathcal{B}(D))$

liefert das Datum $Y := (W, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, Y_t, \vartheta_t, (P^x)_{x\in D})$ einen Borel-Rechts-Prozeß auf D (wobei $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}_t$ die wie üblich - vgl. [21]-S.50f - vervollständigten σ-Algebren seien) (vgl.1.5.5). Ist $E := D \setminus \{\Delta\}$, und geht $(P_t)_{t\geq 0}$ durch Einschränkung auf E aus $(Q_t)_{t\geq 0}$ hervor, so ist Y im Sinne der Definition (1.4) Borel-Rechts-Prozeß auf $(E, \mathcal{L}(E))$ mit Übergangshalbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$.

Getoor [21] beweist die folgende wichtige Beziehung bei Ray-Prozessen:

7.2 Lemma:

Es seien $\mu \in \mathcal{M}_1^+(K, \mathcal{L}(K))$ und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von $(\mathcal{G}_t^\mu)$-Stopzeiten mit $T := \sup T_n$. Für $\Lambda := \{w \in W \mid T(w) < \infty,\ T_n(w) < T(w) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$ und für $f \in \mathcal{B}_b^u(K)$ gilt:

$$E^\mu\left(f\circ Y_T \cdot 1_{\{T<\infty\}} \middle| \mathfrak{S}\left(\bigcup_n \mathcal{G}_{T_n}^\mu\right)\right)_{[P^\mu]} = f\circ Y_T \cdot 1_{\{T<\infty\}} 1_{C\Lambda} + Q_0 f\circ Y_T \cdot 1_\Lambda .$$

Beweis: vgl. [21]-Th.5.11 □

Wir betrachten im weiteren den Rechts-Prozeß Y auf $(D, \mathcal{L}^u(D))$ aus (7.1.3), und auf D die Choquet-Topologie $\tau_{\mathcal{G}}'$ mit der Borel-Struktur $\mathcal{L}_{\mathcal{G}} := \mathcal{L}(D, \tau_{\mathcal{G}}')$.

7.3 Bemerkung:

Gemäß (5.15) ist $\mathcal{L}^u(D) = \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{L}^u}$ (universelle Vervollständigung von $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ in $\mathcal{L}^u(D)$ (vgl. [5]-I-5.3)).

Daher ist Y auch als starker Markov-Prozeß mit Zustandsraum $(D, \tau_{\mathcal{G}}')$ aufzufassen.

Die Pfade des Prozesses Y in $(D, \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{L}^u})$ haben bezüglich der im Vergleich zur Ray-Topologie $\tau|_D$ gröberen Topologie $\tau_{\mathcal{G}}'$ folgende Eigenschaften:

7.4 Lemma:

Die Abbildungen $t \longmapsto Y_t(w)$ (für $w \in W$) sind $\tau_{\mathcal{J}}'$-rechtsstetig und haben (nicht notwendig eindeutige) $\tau_{\mathcal{J}}'$-Linkslimiten in D.

Beweis:

Da $\tau_{\mathcal{J}}' \subset \tau|_D$ ist, gilt mit (7.1.1):

$t \longmapsto Y_t(w)$ ist $\tau_{\mathcal{J}}'$-rechtsstetig.

Nach (7.1.1) existieren ferner τ-Linkslimiten der Pfade $t \longmapsto Y_t(w)$ in K; sei also $\tau\text{-}\lim_{s \nearrow t} Y_s(w) = x \in K$, dann folgt mit (5.2.a) $Y_s(w) \xrightarrow{\tau_{\mathcal{J}}} z$ für jedes $z \in A_x$.

Da nach (4.7.2) $A_x \cap D = A_x \cap \partial_{\mathcal{J}} K \neq \emptyset$ ist für jedes $x \in K$, folgt: es gibt ein $z \in A_x \cap D$ so, daß: $Y_s(w) \xrightarrow[\tau_{\mathcal{J}}']{s \nearrow t} z$.

Überdies sind die $\tau_{\mathcal{J}}'$-Linkslimiten der Pfade nicht eindeutig, falls $A_x \cap D$ nicht einpunktig ist (vgl. 7.10). □

Im allgemeinen ist Y in der (Ray-)Topologie $\tau|_D$ auf D nicht quasilinksstetig, vgl. Beispiele (1.8). Im folgenden wird gezeigt, daß in der $\mathcal{J}$-Choquet-Topologie auf D Quasilinksstetigkeit von Y vorliegt.

7.5 Lemma:

Es seien $\mu \in \mathcal{M}_1^+(D, \mathcal{B}(D))$, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von $(\mathcal{J}_t^\mu)$-Stopzeiten mit $T := \sup_n T_n$.

Für $\Lambda := \{ w \in W \mid T(w) < \infty \text{ und } T_n(w) < T(w) \text{ für } n \in \mathbb{N} \}$ ist dann $\Lambda_0 := \{ w \in \Lambda \mid Y_T(w) \in \mathrm{Tr} Q_0(Y_{T-}(w), \cdot) \} \in \mathcal{J}^\mu$ und $P^\mu(\Lambda_0) = P^\mu(\Lambda)$.

Beweis:

Da (K, τ) kompakt, metrisierbar (Metrik d) ist, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Überdeckung von K durch offene Mengen U_i^ε $(i = 1, \ldots, n_\varepsilon)$ vom Durchmesser höchstens ε, d.h. $K = \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} U_i^\varepsilon$. Es bezeichne abkürzend

$C(w) := \mathrm{Tr}Q_o(Y_{T_-}(w),\cdot)$ und für $i \in \mathbb{N}$

$$\Lambda_i^\varepsilon := \{ w \in \Lambda \mid Y_T(w) \in U_i^\varepsilon \text{ und } Q_o(Y_{T_-}(w), U_i^\varepsilon) > o \} .$$

Dann ist für $\varepsilon > o$:

$$\bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} \Lambda_i^\varepsilon \subset \{ w \in \Lambda \mid d(Y_T(w), C(w)) \leq \varepsilon \}$$

und $\bigcap_\varepsilon \{ w \in \Lambda \mid d(Y_T(w), C(w)) \leq \varepsilon \} = \Lambda_o$.

Ferner sind für $i \in \{1, \ldots, n_\varepsilon\}$ $\Lambda_i^\varepsilon \in \mathcal{G}^\mu$ und

$$P^\mu(\Lambda) \geq P^\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} \Lambda_i^\varepsilon\Big) = \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} P^\mu\Big(\Lambda_i^\varepsilon \setminus \bigcup_{\nu=1}^{i-1} \Lambda_\nu^\varepsilon\Big) \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} P^\mu\Big(\{ w \in \Lambda \mid Y_T(w) \in U_i^\varepsilon \setminus \bigcup_{\nu=1}^{i-1} U_\nu^\varepsilon \text{ und } Q_o(Y_{T_-}(w), U_i^\varepsilon) > o \}\Big)$$

(denn: jedes $w \in \Lambda$ mit $Y_T(w) \in U_i^\varepsilon \setminus \bigcup_{\nu=1}^{i-1} U_\nu^\varepsilon$ und

$Q_o(Y_{T_-}(w), U_i^\varepsilon) > o$ ist Element aus $\Lambda_i^\varepsilon \setminus \bigcup_{\nu=1}^{i-1} \Lambda_\nu^\varepsilon$) .

Für $W_i^\varepsilon := \{ w \in W \mid T_n(w) < T(w) \text{ für } n \in \mathbb{N} \} \cap$

$$\cap \{ w \in W \mid Q_o(Y_{T_-}(w), U_i^\varepsilon) > o \}$$

ist mit (7.2) (da $W_i^\varepsilon \in \mathfrak{S}(\bigcup_n \mathcal{G}_{T_n}^\mu)$) :

$$P^\mu(\Lambda) \geq \sum_{i=1} \int 1_{U_i^\varepsilon \setminus \bigcup_{\nu=1}^{i-1} U_\nu^\varepsilon} \circ Y_T \cdot 1_{\{T<\infty\}} 1_{W_i^\varepsilon} \, dP^\mu =$$

$$= \sum_{i=1} \int Q_o 1_{U_i^\varepsilon \setminus \bigcup_{\nu=1}^{i-1} U_\nu^\varepsilon} \circ Y_{T_-} \cdot 1_\Lambda \cdot 1_{W_i^\varepsilon} \, dP^\mu =$$

$$= \sum_{i=1} \int Q_o(Y_{T_-}, U_i^\varepsilon \setminus \bigcup_{\nu=1}^{i-1} U_\nu^\varepsilon) \cdot 1_\Lambda \, dP^\mu =$$

$$= \int Q_o(Y_{T_-}, K) \cdot 1_\Lambda \, dP^\mu = P^\mu(\Lambda) ,$$

also $P^\mu(\Lambda) = P^\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} \Lambda_i^\varepsilon\Big)$.

Wählt man zu einer Folge $(\varepsilon_j)_j \searrow o$ die Mengen

$U_i^{\varepsilon_j}$ $(i=1, \ldots, n_{\varepsilon_j}, j \in \mathbb{N})$ so, daß für $k > j$ und $i \in \{1, \ldots, n_{\varepsilon_k}\}$

ein $i \in \{1,\dots,n_{\varepsilon_j}\}$ existiert mit $U_k^{\varepsilon_k} \subset U_i^{\varepsilon_j}$, so ist die Folge $(\bigcup_{i=1}^{n_{\varepsilon_j}} \Lambda_{-i}^{\varepsilon_j})_{j\in\mathbb{N}}$ absteigend. Es folgt:

$$P^\mu(\Lambda) = \lim_{j\to\infty} P^\mu(\bigcup_i \Lambda_i^{\varepsilon_j}) = P^\mu(\bigcap_j \bigcup_i \Lambda_i^{\varepsilon_j}) \le P^\mu(\Lambda),$$

d.h. $\Lambda_0 \in \mathcal{J}^\mu$ und $P^\mu(\Lambda_0) = P^\mu(\Lambda)$. □

7.6 Folgerungen:

Für $\mu \in \mathcal{M}_1^+(D, \mathcal{B}(D))$ und $(T_n)_n \uparrow T$ wie in (7.5) existiert eine P^μ-Nullmenge $N \in \mathcal{J}^\mu$ so, daß gilt:

a) für $w \in \Lambda \setminus N$ ist $Y_T(w) \in A_{Y_{T-}(w)} \cap D$, also ist nach (5.2) $Y_{T_m}(w)$ $\tau_{\mathcal{J}}'$-konvergent gegen $Y_T(w)$;

b) speziell auf $W \setminus N$ ist $\Lambda \cap \{Y_{T-} \in D\} = \Lambda \cap \{Y_{T-} = Y_T\}$ (vgl. [21]-5.15).

Beweis:

a) es existiert eine P^μ-Nullmenge $N \in \mathcal{J}^\mu$ so, daß für $w \in \Lambda \setminus N$: $Y_T(w) \in \mathrm{Tr}Q_0(Y_{T-}(w), \cdot) \subset A_{Y_{T-}(w)}$ ist.

b) gilt, da $A_{Y_{T-}(w)} = \{Y_{T-}(w)\}$ für $Y_{T-}(w) \in D$. □

7.7 Satz:

Der Rechts-Prozeß Y auf D ist $\tau_{\mathcal{J}}'$-quasilinksstetig auf $[0,\infty)$, d.h.:

für $\mu \in \mathcal{M}_1^+(D, \mathcal{B}(D))$ und eine gegen T aufsteigende Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(\mathcal{J}_t^\mu)$-Stopzeiten T_n gilt

P^μ-f.s. auf $\{T < \infty\}$: $Y_{T_n} \xrightarrow[\tau_{\mathcal{J}}']{n} Y_T$.

Beweis:

Es ist $\{T<\infty\} = (\{T<\infty\} \cap \{\text{es gibt ein } n\in\mathbb{N} \text{ mit } T_n = T\}) \cup \Lambda$.

Nun gilt für $w \in \Lambda$ nach (7.6) und für $w \in \{T<\infty\} \setminus \Lambda$ trivialerweise P^μ-f.s.: $Y_{T_n}(w) \xrightarrow[\tau_{\mathcal{J}}']{n} Y_T(w)$. □

7.8 Bemerkungen:

1.) In der Situation der SFHK auf gesättigter Menge E (vgl. 3.9) erhält man auf Grund von (7.7) mit (6.12) die Quasilinksstetigkeit auf $[0,\infty)$ der assoziierten Rechts-Prozesse auf $E \cup \{0\} = \mathrm{Ext}\,\Sigma_1$ in der fazialen Topologie.

2.) Speziell, falls Σ_1 Bauer-Simplex ist, sind die Prozesse quasilinksstetig auf $[0,\infty)$ in der natürlichen Topologie, also Huntsch.

Das liefert einen Spezialfall des Ergebnisses von Hansen [24], daß die zu einem SBR assoziierten Prozesse Huntsch sind.

3.) Die unter (1.8) aufgeführten Prozesse sind bzgl. der zugehörigen $\mathcal{F}$-Choquet-Topologien $\tau_{\mathcal{F}}'$ auf D quasilinksstetig.

Zur Behandlung der Frage, wann $\mathcal{F}$-Choquet- und Ausgangs-Topologie auf D übereinstimmen, wird zunächst der Begriff 'degenerierter Branch-Punkt' eingeführt:

7.9 Definition:

Ein Branch-Punkt $x \in K \setminus D$ heißt degeneriert, falls $Q_0(x,\cdot)$ einen einpunktigen Träger hat.

7.10 Lemma:

Falls keine degenerierten Branch-Punkte existieren, ist $A_x \cap D$ mindestens zweipunktig.

Beweis: ist evident, da $\mathrm{Tr}Q_0(x,\cdot) \subset A_x$ ist. □

7.11 Folgerung:

Falls keine degenerierten Branch-Punkte existieren, gelten gemäß (4.13) die Äquivalenzen:
$\tau_{\mathcal{F}}'$ ist separiert $\iff \overline{D} = D \iff \tau_{\mathcal{F}}' = \tau|_D$. □

7.12 Bemerkungen:

1.) Für den Rechts-Prozeß auf D kann man o.B.d.A. voraus-

setzen, daß D dicht liegt in K und die stetigen α-exzessiven Funktionen ($\alpha \geq 0$) auf K die Punkte trennen; denn die folgenden beiden Operationen verändern nur den Eintrittsrand $K \setminus D$ und damit die Menge der möglichen Startmaße μ auf $K \setminus D$ für Ray-Prozesse Y^μ:

(i) Übergang von K zu dem Abschluß $\overline{D}$ von D in K.

(ii) Übergang von K zu dem Quotientenraum $L := K/\sim$ bzgl. der Äquivalenzrelation $\sim$, wobei $x \sim y$, falls für alle $\alpha > 0$ $V_\alpha(x,\cdot) = V_\alpha(y,\cdot)$ sind als Maße auf K. Da die Äquivalenzklassen zu Punkten aus D einelementig sind, läßt sich D in L einbetten und jeder Prozeß Y^μ in naheliegender Weise auf L definieren. Dann trennen die α-Potentiale stetiger Funktionen auf L die Punkte (vgl. [29]-S.118).

2.) Falls für ein $\alpha \geq 0$ die α-exzessiven Funktionen auf K die Punkte trennen, so existieren keine degenerierten Branch-Punkte (denn: $Q_0 s = s$ für $s \in \mathcal{E}^\alpha$).

Mit 1.) und (7.11) folgt, daß die Äquivalenzen aus (7.11) 'o.B.d.A. stets' gelten.

3.) Gilt für die markovsche Ray-Resolvente (V_α) auf (K,τ) zusätzlich zu den Voraussetzungen dieses Paragraphen:

(i) D liegt dicht in K,

(ii) $\mathcal{E}_c^\alpha(V_\alpha)$ trennt die Punkte von K $(\alpha > 0)$;

so liefert in diesem Fall die Ray-Kompaktifizierung von D (vgl. 1.6) bzgl. des Prozesses Y als Ray-Topologie die Ausgangs-Topologie $\tau|_D$.
Zum Beweis kann man mittels (i)/(ii) zeigen, daß eine zu (K,τ) homöomorphe Ray-Kompaktifizierung von D existiert (i.a. erhält man nur eine stetige Surjektion von (K,τ) auf eine Ray-Kompaktifizierung von D).

Abschließend noch einige Bemerkungen zu der Voraussetzung 'o.B.d.A.: $\Delta \in K$':

7.13 Bemerkungen:

1.) In der betrachteten Situation sei $\Delta \in K$ τ-isoliert, also $K_1 := K \setminus \{\Delta\}$ kompakt bzgl. $\tau_1 := \tau|_{K_1}$. Dann ist mit $V_\alpha^1 := V_\alpha|_{K_1}$ $(V_\alpha^1)_{\alpha>0}$ eine Ray-Resolvente auf (K_1, τ_1), und für den zugehörigen Kegel $\mathcal{G}_1$ gilt $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}|_{K_1}$. Ferner gilt nach (4.10.d) für die mit $\mathcal{G}_1$ assoziierte $\mathcal{G}_1$-Choquet-Topologie auf K_1:

$$E := D \setminus \{\Delta\} = \partial_{\mathcal{G}} K \setminus \{\Delta\} = \partial_{\mathcal{G}_1} K_1 \quad \text{und} \quad \tau_1 \mathcal{G}_1 = \tau_{\mathcal{G}}|_{K_1},$$

folglich ist für die Einschränkung auf E:

$$\tau_{\mathcal{G}}'' := \tau_{\mathcal{G}}|_E =: \tau_1 \mathcal{G}_1|_E =: \tau_1 \mathcal{G}_1' .$$

2.) Die unter 1.) beschriebene Situation liegt dann vor, wenn man mit einer markovschen Ray-Resolvente auf einem Kompaktum (K_1, τ_1) startet, einen absorbierenden Punkt $\Delta \notin K_1$ als isolierten Punkt hinzufügt und die Resolvente auf $K := K_1 \cup \{\Delta\}$ fortsetzt. Aus 1.) folgt dann, daß die Choquet-Topologie zu der Ausgangs-Resolvente sich als Restriktion der Choquet-Topologie zu der fortgesetzten Resolvente ergibt.

§ 8 Lokalisierung und Garbeneigenschaft

Es wird gezeigt, daß für gewisse Rechts-Prozesse sich eine geeignete Lokalisierung der stark supermedianen Funktionen anbietet, die die Garbeneigenschaft besitzt.

Dieser Sachverhalt wird in allgemeinem Rahmen hergeleitet und ist dann anwendbar auf

1.) Standard-Prozesse (Ergebnis von Shur [34]) und

2.) Rechts-Prozesse auf den Nicht-Branch-Punkten von Ray-Resolventen.

Eine Diskussion der zweiten Anwendung erfolgt in § 9 (speziell mit Ergebnissen für SHK).

Für den Paragraphen 8 gelten folgende Voraussetzungen und Bezeichnungsweisen:

8.1 Voraussetzungen:

(i) Es seien (K,τ) ein kompakter metrischer Raum und $E_\Delta = E \cup \{\Delta\}$ (mit $\Delta \notin E$) eine dichte Teilmenge von K.

(ii) Es sei $X = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ ein Rechts-Prozeß auf $(E, \tau|_E, \mathcal{S}^\mu(E))$ mit Friedhof Δ, dessen Pfade auf (o,ζ) τ-Linkslimiten in K besitzen.
(ζ bezeichnet wie in (1.7.a) die Lebenszeit von X in E).

(iii) Es existiere ein Kegel $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K,\tau)$ mit den Eigenschaften aus (4.1) derart, daß $\partial_{\mathcal{F}} K = E_\Delta$ ist und daß die zugehörige $\mathcal{F}$-Choquet-Topologie $\tau_{\mathcal{F}|E}$ auf E lokal-quasikompakt ist.

Ferner bezeichne $\tau_{\mathcal{F}}' := \tau_{\mathcal{F}}|_{E_\Delta}$ und $\tau_{\mathcal{F}}'' := \tau_{\mathcal{F}}|_E$.

Alle nur auf E definierten Funktionen seien durch Null in Δ fortgesetzt. $\mathcal{B}^n(E)$ bezeichne die $\mathcal{S}(E,\tau|_E)$-nahezu-meßbaren Funktionen auf E.

8.2 Beispiele:

1.) Ist X Standard-Prozeß auf einem lokalkompakten Raum (E,τ) mit abzählbarer Basis und der Ein-Punkt-Kompaktifizierung (E_Δ,τ_Δ), so sind (i) und (ii) erfüllt.
Für $\mathcal{F} := \mathcal{C}(E_\Delta)$ ist $\partial_{\mathcal{F}} E_\Delta = E_\Delta$ und $\tau'_{\mathcal{F}} = \tau_\Delta$, $\tau''_{\mathcal{F}} = \tau$, (vgl. 4.12.1), weswegen (iii) ebenfalls erfüllt ist.

2.) Es sei $(V_\alpha)_{\alpha>0}$ eine markovsche Ray-Resolvente auf einem kompakten metrischen Raum (K,τ) mit Nicht-Branch-Punkten D, und es gelte (vgl. § 7, speziell 7.12/7.13):

(1) es existiert ein absorbierender Punkt $\Delta \in D$;
(2) D ist dicht in K;
(3) $\mathcal{E}_c^\infty(V_\alpha)$ trennt die Punkte von K.

Dann sind mit dem zugehörigen Rechts-Prozeß Y aus (7.1.3) auf $(E,\mathcal{B}(E))$ (wobei $E := D\setminus\{\Delta\}$, d.h. $E_\Delta = D$ sei) die Voraussetzungen (i) und (ii) erfüllt.
Für den Kegel $\mathcal{G} := \mathcal{E}_c^\infty + \mathbb{R}$ auf K ist $\partial_{\mathcal{G}} K = D$, so daß - falls $\tau''_{\mathcal{G}} = \tau_{\mathcal{G}|E}$ lokal-quasi-kompakt ist - auch (iii) erfüllt ist.

Nach (6.13) fallen die Beispiele (1.8.1/1.8.2/1.8.4/1.8.5.b) in diesen Kontext.

3.) Es sei (V_α^1) markovsche Ray-Resolvente auf einem kompakten metrischen Raum (K_1,τ_1) mit Nicht-Branch-Punkten E (so daß E dicht ist in K_1) und Kegel $\mathcal{G}_1$.
(V_α) sei die markovsche Fortsetzung von (V_α^1) auf $K := K_1 \cup \{\Delta\}$ mit fortgesetzter Topologie τ (so daß Δ absorbierender, τ-isolierter Punkt ist) und mit Kegel $\mathcal{G}$.
Dann erfüllen (K,τ), $\mathcal{G}$ und der zugehörige Rechts-Prozeß Y auf den Nicht-Branch-Punkten $D = E \cup \{\Delta\}$ von (V_α) die Voraussetzungen (i) - (iii), sofern die $\mathcal{G}_1$-Choquet-Topologie $\tau_{1\mathcal{G}_1}$ auf E lokal-quasi-kompakt ist (vgl. 7.13).

8.3 Definition:

Es seien für $O \in \tau_{\mathcal{F}}''$
a) $\mathcal{K}(O) := \{C \subset O \mid C\ \tau_{\mathcal{F}}''\text{-quasi-kompakt}\}$,

$\mathcal{U}(O) := \{ U \in \tau_{\mathcal{F}}'' \mid$ es gibt ein $C \in \mathcal{C}(\sigma)$ mit $U \subset C \}$;

b) $\mathcal{E}^{lok}(\sigma)$ die Menge der endlichen exzessiven Funktionen für den Rechts-Prozeß, die auf jedem $U \in \mathcal{U}(\sigma)$ beschränkt sind.

c) mit den Austrittskernen Π_U aus $U \in \mathcal{L}^u(E)$ (vgl. 2.1.a): $\mathcal{T}(\sigma)$ die Menge aller $f \in \mathcal{B}^n(E)$ mit

(i) $f \geq -s$ für ein $s \in \mathcal{E}^{lok}(\sigma)$;

(ii) $\Pi_U f \not\leq f$ für $U \in \mathcal{U}(\sigma)$.

8.4 Bemerkungen:

1.) Für $\sigma \in \tau_{\mathcal{F}}''$ ist $\mathcal{C}(\sigma) = \{ C \subset \sigma \mid C$ $\tau_{\mathcal{F}}$-quasi-kompakt$\}$,
$\mathcal{U}(\sigma) = \{ U \in \tau_{\mathcal{F}}' \mid$ es gibt ein $C \in \mathcal{C}(\sigma)$ mit $U \subset C \}$.

2.) Für $\sigma \in \tau_{\mathcal{F}}''$ sind $\mathcal{C}(\sigma)$ und $\mathcal{U}(\sigma)$ stabil unter endlichen Vereinigungen: überdies ist $\mathcal{U}(\sigma)$ stabil gegen Durchschnitte mit $\tau_{\mathcal{F}}$-offenen Mengen.

3.) $(\mathcal{T}(\sigma))_{\sigma \in \tau_{\mathcal{F}}''}$ bildet ein Prägarbendatum, d.h. für $\sigma_1 \subset \sigma_2$ ist $\mathcal{T}(\sigma_1) \supset \mathcal{T}(\sigma_2)$.

In den Voraussetzungen (8.1) tritt keine explizite Kopplung des Kegels $\mathcal{F}$ an den Prozeß auf. Implizit liefert Voraussetzung (8.1.ii) Regularitäten der Pfade des Prozesses in der Choquet-Topologie (vgl. 7.4/7.7). Wesentlich ist die Voraussetzung (8.1.iii) der Lokal-Quasi-Kompaktheit der Choquet-Topologie, auf Grund derer sich (analog wie bei Shur [34]) eine Zerlegungseigenschaft der 'Testmengen' $U \in \mathcal{U}(\sigma_1 \cup \sigma_2)$ erhalten läßt (vgl. 8.5). Diese bedeutet einen wesentlichen Schritt zum Nachweis der Garbeneigenschaft des Prägarbendatums aus (8.4.3).

8.5 Lemma:

Es seien $\sigma_i \in \tau_{\mathcal{F}}''$ $(i = 1,2)$ und $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$; $U \in \mathcal{U}(\sigma)$.
Dann existieren $U_i \in \mathcal{U}(\sigma_i)$ $(i = 1,2)$ so, daß
$U = U_1 \cup U_2$ ist und überdies gilt:
falls $(z_n) \subset U$ τ-konvergent ist gegen $z \in K$, so liegt

(z_n) schließlich in einem der U_i $(i = 1,2)$.

Beweis:
Zu U existiert ein $C \in \mathfrak{L}(\sigma)$ mit $U \subset C$. Zu $x \in C$ wähle man gemäß (8.1.iii) $\tau''_{\mathfrak{F}}$-offene Umgebungen V_x von x so, daß $V_x \in \mathfrak{U}(\sigma_i)$ ist, falls $x \in \sigma_i$ ist $(i = 1,2)$. Dann ist $\bigcup_{x \in C} V_x$ eine $\tau''_{\mathfrak{F}}$-offene Überdeckung von C, die wegen der Quasi-Kompaktheit von C eine endliche Teilüberdeckung $\bigcup_{\nu=1}^{n} V_{x_\nu}$ enthält. Dabei seien o.B.d.A. $V_{x_\nu} \in \mathfrak{U}(\sigma_1)$ für $\nu = 1,\dots,n_1$, $V_{x_\nu} \in \mathfrak{U}(\sigma_2)$ für $\nu = n_1+1,\dots,n$.
Mit $W_1 := \bigcup_{\nu=1}^{n_1} V_{x_\nu}$, $W_2 := \bigcup_{\nu=n_1+1}^{n} V_{x_\nu}$ gilt dann:
$U = U \cap C \subset (U \cap W_1) \cup (U \cap W_2) \subset U$, also $U = U_1 \cup U_2$
für $U_i := U \cap W_i$ und $U_i \in \mathfrak{U}(\sigma_i)$ nach (8.4.2) $(i = 1,2)$.

Die τ-Konvergenz von (z_n) gegen z impliziert gemäß (5.2.c/5.3.b) die $\tau''_{\mathfrak{F}}$-Konvergenz von (z_n) gegen ein $y \in A_z \cap C$, das somit in einem V_{x_ν} $(\nu \in \{1,\dots,n\})$ liegt.
Folglich ist (z_n) schließlich in V_{x_ν}. □

8.6 Folgerung:

Hat $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ die Eigenschaft:
für $i = 1,2$ und $\sigma_i \in \tau''_{\mathfrak{F}}$ ist $f \geq -s_i$ für ein $s_i \in \mathcal{E}^{lok}(\sigma_i)$, so existiert ein $s \in \mathcal{E}^{lok}(\sigma_1 \cup \sigma_2)$ mit $f \geq -s$.

Beweis:
Es sei $s := \inf(s_1,s_2) \in \mathcal{E}_e$ (nach 1.5.4), ferner sei $U \in \mathfrak{U}(\sigma_1 \cup \sigma_2)$. Dann existieren nach (8.5) eine Zerlegung $U = U_1 \cup U_2$ mit $U_i \in \mathfrak{U}(\sigma_i)$ und dazu nach Voraussetzung $c_i \in \mathbb{R}$ mit $s_i \leq c_i$ auf U_i $(i = 1,2)$.
Mit $c := \sup(c_1,c_2)$ ist dann:
$f \geq \sup(-s_1,-s_2) = -\inf(s_1,s_2) = -s$ und
$s = \inf(s_1,s_2) \leq s_i \leq c_i$ auf U_i $(i = 1,2)$,
also $s \leq \sup(c_1,c_2) = c$ auf $U_1 \cup U_2 = U$. □

Im folgenden wird zum Beweis der Garbeneigenschaft von $(\mathcal{T}(\mathcal{O}))_{\mathcal{O}\in\tau_{\mathcal{F}}''}$ aus (8.4.3) die Beweisidee von Shur [34] nachvollzogen. Aus (8.6) ergibt sich, daß die $\mathcal{E}^{lok}$-Beschränktheit einer geeigneten Zerlegungseigenschaft genügt.

Zum Nachweis von Ungleichungen der Form (8.3.c.ii) definiert man eine aufsteigende Folge von iterierten Austrittszeiten:

8.7 Definition:

Sind $\mathcal{O}_i \in \tau_{\mathcal{F}}''$, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$, $U \in \mathcal{U}(\mathcal{O})$ und $U_i \in \mathcal{U}(\mathcal{O}_i)$ konstruiert gemäß (8.5), so seien

$T_0 := 0$, $T_1 := D_{\complement U_1}$, $T_2 := T_1 + D_{\complement U_2} \circ \theta_{T_1}$ und

$T_{2n+1} := T_{2n} + D_{\complement U_1} \circ \theta_{T_{2n}}$, $T_{2n+2} := T_{2n+1} + D_{\complement U_2} \circ \theta_{T_{2n+1}}$ $(n \in \mathbb{N})$

(wobei $D_{\complement U_i}$ die Austrittszeiten aus U_i sind, vgl.2.1.a); ferner sei $T := \sup_n T_n$.

8.8 Lemma:

a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $X_{T_{2n+1}} \in \complement U_1$ und $X_{T_{2n+2}} \in \complement U_2$.

b) $\{T < \zeta\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \{T_n = T\} \cap \{T < \zeta\}$.

c) Es ist $T = D_{\complement U}$.

d) Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $T_{2n+2} = T_2 + T_{2n} \circ \theta_{T_2}$.

Beweis:

a) folgt aus der $\tau_{|E_\Delta}$-Rechtsstetigkeit der Pfade von X .

b) Auf $\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \{T_n < T < \zeta\}$ gilt: $X_{T_n} \xrightarrow{\tau} X_{T-} \in K$,

also liegt nach (8.5) $(X_{T_n})_n$ pfadweise schließlich in einem der U_i $(i = 1,2)$ im Widerspruch zu a) .

c) Auf $\{T \geq \zeta\}$ ist $\zeta \leq T \leq D_{\complement U} \leq \zeta$.

Auf $\{T < \zeta\}$ ist $T_n = T$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ (gemäß b)), also auch $T_{n+1} = T$ jeweils; d.h. mit a):

$X_T \in \complement U_1 \cap \complement U_2 = \complement U$, woraus $T \geq D_{\complement U}$ folgt.

d) Die Behauptung folgt mittels vollständiger Induktion

unter mehrfacher Anwendung der Beziehung: $\theta_T = \theta_S \circ \theta_R$ für Stopzeiten R, S, T mit $T = R + S \circ \theta_R$ (vgl. [5]-IV-4.35). □

8.9 Lemma:

Für $f \in \mathcal{B}^n(E)$ ist
$(\Pi_{U_1}\Pi_{U_2})^n f(x) = E^x(f \circ X_{T_{2n}}, T_{2n} < \infty)$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis:

$n = 0$: klar.

$n \longrightarrow n+1$: $(\Pi_{U_1}\Pi_{U_2})^{n+1} f(x) = \Pi_{U_1}\Pi_{U_2} g_n(x)$
(mit $g_n := (\Pi_{U_1}\Pi_{U_2})^n f$)

$= E^x(\Pi_{U_2} g_n \circ X_{D_{\complement U_1}}, D_{\complement U_1} < \infty) = E^x(E^{X_{D_{\complement U_1}}}(g_n \circ X_{D_{\complement U_2}}, D_{\complement U_2} < \infty), D_{\complement U_1} < \infty)$

$\underset{(*)}{=} E^x(g_n \circ X_{D_{\complement U_2}} \circ \theta_{D_{\complement U_1}} \cdot 1_{\{D_{\complement U_2} < \infty\}} \circ \theta_{D_{\complement U_1}}, D_{\complement U_1} < \infty)$

$= E^x(g_n \circ X_{T_2}, T_2 < \infty) = E^x(E^{X_{T_2}}(f \circ X_{T_{2n}}, T_{2n} < \infty), T_2 < \infty)$

$\underset{(*)}{=} E^x(f \circ X_{T_{2n}} \circ \theta_{T_2} \cdot 1_{\{T_{2n} < \infty\}} \circ \theta_{T_2}, T_2 < \infty)$

$\underset{(8.8d)}{=} E^x(f \circ X_{T_{2n+2}}, T_{2n+2} < \infty)$,

wobei in die Gleichungen (*) jeweils die starke Markov-Eigenschaft eingeht. □

8.10 Satz:

Unter den Voraussetzungen (8.1) bildet $(\mathcal{T}_+(\sigma))_{\sigma \in \tau_{\mathcal{F}}''}$ ein Garbendatum, d.h. falls $\sigma = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ $(\sigma_i \in \tau_{\mathcal{F}}'')$, so ist

$$\mathcal{T}_+(\sigma) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_+(\sigma_i) .$$

$(\mathcal{T}(\sigma))_{\sigma \in \tau_{\mathcal{F}}''}$ bildet ein Garbendatum, falls zusätzlich für alle $x \in E$ $P^x(\zeta < \infty) = 1$ ist.

Beweis. (Bezeichnungen wie bisher):

'$\subset$': gilt, da $(\mathcal{T}(\sigma))_\sigma$ Prägarbendatum nach (8.4.3).

'$\supset$': (i) Es sei $U \in \mathcal{U}(\sigma)$, dann existiert ein $C \in \mathcal{L}(\sigma)$ mit $U \subset C$ und $\bigcup_i \sigma_i$ ist eine $\tau_{\mathcal{F}}''$-offene Überdeckung

von C , die eine endliche Teilüberdeckung enthält. Daher genügt es, den Fall $I = \{1,2\}$ zu betrachten.

(ii) Seien also $U \subset C \subset \sigma_1 \cup \sigma_2 = \sigma$ und $f \in \mathcal{T}(\sigma_1) \cap \mathcal{T}(\sigma_2)$. Gemäß (8.6) existiert ein $s \in \mathcal{E}^{lok}(\sigma)$ mit $f \geq -s$. Dann ist für $x \in E$ $\Pi_U f(x) \geq -\Pi_U s(x) \geq -s(x) > -\infty$, da $s \in \mathcal{E}_e$, also f $\Pi_U(x,\cdot)$-quasi-integrierbar.

Überdies gilt wegen $s \leq c$ auf U (für ein $c \in \mathbb{R}_+$) für $f_n := \inf(f,n) : |f_n \circ X_{T_j}| \leq c + s \cdot X_{D_{\ell U}} + n =: g$ $[P^x]$, und $E^x(g) \leq c + n + \Pi_U s(x) \leq c + n + s(x) < \infty$, also ist g P^x-integrierbare Majorante für $\{|f_n \circ X_{T_j}| \mid j \in \mathbb{N}_0\}$.

(iii) Ist $P^x(\zeta < \infty) = 1$, so auch $P^x(D_{\ell U} < \infty) = 1$.

(iv) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\Omega_k := \{T_k = D_{\ell U} , X_{T_{k-1}} \in U\}$, dann gilt mit (ii), (iii) unter jeder der Voraussetzungen (d.h. $f \geq 0$ oder ζ f.s. endlich):

$$\Pi_U f(x) = \sup_n \Pi_U f_n(x) \underset{(8.8)}{=} \sup_n \sum_k E^x(f_n \circ X_{D_{\ell U}}, D_{\ell U} < \zeta, \Omega_k) =$$

$$= \sup_n \sum_k E^x(\lim_j f_n \circ X_{T_j}, D_{\ell U} < \zeta, \Omega_k) =$$

$$= \sup_n E^x(\lim_j f_n \circ X_{T_{2j}}, D_{\ell U} < \infty) =$$

$$= \sup_n E^x(\lim_j f_n \circ X_{T_{2j}} \cdot \lim_j 1_{\{T_{2j} < \infty\}} \cdot 1_{\{D_{\ell U} < \infty\}}) =$$

$$= \sup_n E^x(\lim_j (f_n \circ X_{T_{2j}} \cdot 1_{\{T_{2j} < \infty\}}), D_{\ell U} < \infty) =$$

$$= \sup_n \lim_j E^x(f_n \circ X_{T_{2j}} , T_{2j} < \infty , D_{\ell U} < \infty) \leq$$

$$\leq \sup_n \varliminf_j E^x(f_n \circ X_{T_{2j}} , T_{2j} < \zeta) =$$

$$= \sup_n \varliminf_j (\Pi_{U_1} \Pi_{U_2})^j f_n(x) \leq \varliminf_j (\Pi_{U_1} \Pi_{U_2})^j f(x) \leq f(x) . \quad \square$$

Die erste der Folgerungen (8.11) - (8.13) liefert das Ergebnis von Shur [34] zur Garbeneigenschaft exzessiver Funktionen bei Standard-Prozessen; die beiden anderen beziehen sich auf die Lokalisierung stark supermedianer Funktionen bei Rechts-Prozessen auf Nicht-Branch-Punkten.

8.11 Folgerung:

Es sei X Standard-Prozeß auf (E,τ) wie in (8.2.1) mit submarkovscher Halbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$.

Für eine offene Menge $\sigma \subset E$ ist dann $\mathcal{U}(\sigma)$ (vgl. 8.3.a) das System $\mathcal{U}_c(\sigma)$ aller offenen in σ relativ-kompakten Mengen, und $\mathcal{E}^{lok}(\sigma)$ sind die endlichen, auf σ lokalbeschränkten exzessiven Funktionen.

Wie in (8.3.c) sei für $\sigma \in \tau$:

$$\mathcal{T}(\sigma) := \{ f \in \mathcal{B}^n(E) \mid f \geq -s \text{ für ein } s \in \mathcal{E}^{lok}(\sigma) \text{ und } \Pi_U f \leq f \text{ für alle } U \in \mathcal{U}_c(\sigma) \},$$

ferner:

$$\mathcal{E}(\sigma) := \{ f \in \mathcal{T}_+(\sigma) \mid \text{für } x \in \sigma \text{ und } (U_n)_n \subset \mathcal{U}_c(\sigma) \text{ mit } (U_n) \searrow \{x\} \text{ und } P^x(T_{\complement U_m} > 0) = 1 \text{ gilt: } \lim_n \Pi_{U_m} f(x) = f(x) \}.$$

Dann gilt mit (8.10) und (2.12/2.16):

1.) $\mathcal{T}_+(E)$ ist die Menge $\mathcal{S}^*$ der stark supermedianen Funktionen auf E.

2.) $\mathcal{E}(E)$ ist die Menge $\mathcal{E}$ der exzessiven Funktionen auf E.

3.) Die Prägarbendaten $(\mathcal{T}_+(\sigma))_{\sigma \in \tau}$ und $(\mathcal{E}(\sigma))_{\sigma \in \tau}$ besitzen jeweils die Garbeneigenschaft. □

8.12 Folgerung:

Es sei Y Rechts-Prozeß auf $(E,\tau,\mathcal{B}^u(E))$ wie in (8.2.2), und es sei $(E,\tau_{\mathcal{G}}'')$ lokal-quasi-kompakt.

1.) Dann bildet nach (8.10) $\underline{\underline{\mathcal{T}}}_+ := (\mathcal{T}_+(\sigma))_{\sigma \in \tau_{\mathcal{G}}''}$ ein Garbendatum, wobei für $\sigma \in \tau_{\mathcal{G}}''$, $\mathcal{U}(\sigma)$, $\mathcal{E}^{lok}(\sigma)$ und $\mathcal{T}(\sigma)$ mit $\mathcal{F} := \mathcal{G}$ wie unter (8.3) definiert sind.

2.) Liegt überdies die Situation (8.2.3) vor, so ist $\tau_{\mathcal{G}}'' = \tau_{1\mathcal{G}_1}'$ (mit den Bezeichnungen aus 8.2.3), so daß $(E,\tau_{\mathcal{G}}'')$ quasi-kompakt ist (nach 4.11).

Mit (2.12/2.15) folgt, daß dann $\mathcal{T}_+(E)$ die Menge der stark supermedianen Funktionen $\mathcal{S}^*$ auf E ist.

Folglich liefert, sofern die Topologie $\tau_{1\mathfrak{g}_+}'$ auf E lokal-quasi-kompakt ist, $\underline{\underline{J}}_+$ in diesem Falle eine Lokalisierung der stark supermedianen Funktionen, die die Garbeneigenschaft besitzt.
Dazu ist zu bemerken, daß der Rechts-Prozeß Y die Voraussetzungen des Paragraphen 2 erfüllt; aus [21]-12.4 folgt, daß $\mathcal{E}^\alpha \subset \mathcal{B}^B(E)$ ist für $\alpha \geq 0$. ([21]-12.4 ist anwendbar, da nach (7.12.3) aus (8.2.2(1)-(3)) folgt, daß $\tau|_D$ die Ray-Topologie ist.) □

8.13 Folgerung:

Es sei Y ein Rechts-Prozeß wie in (8.2.2) auf $(E,\tau,\mathcal{B}(E))$, und es sei $(D,\tau_{\mathfrak{g}}')$ lokal-quasi-kompakt.
Dann bildet (mit den Bezeichnungen aus 8.12) $\underline{\underline{J}}$ ein Garbendatum, und es ist $J_+(E) = \mathcal{S}^*$.

Beweis:
Ist $(D,\tau_{\mathfrak{g}}')$ lokal-quasi-kompakt, so auch $(E,\tau_{\mathfrak{g}}'')$, denn jede $\tau_{\mathfrak{g}}'$-Umgebungsbasis für einen Punkt $x \in E$ liegt schließlich in E, da $\{\Delta\}$ $\tau_{\mathfrak{g}}'$-abgeschlossen ist. Also folgt die Garbeneigenschaft nach (8.12).
Das Weitere ergibt sich mit (2.12):
Für jedes $x \in D$ bilde $(U_x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine quasi-kompakte $\tau_{\mathfrak{g}}'$-Umgebungsbasis von x, wobei $\Delta \notin U_x^{(n)}$ sei, falls $x \neq \Delta$, ferner bezeichne $\mathring{U}_x^{(n)}$ jeweils den $\tau_{\mathfrak{g}}'$-offenen Kern von $U_x^{(n)}$.
Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$:
$D \setminus \mathring{U}_\Delta^{(n)}$ ist $\tau_{\mathfrak{g}}'$-quasi-kompakt, und es existieren endlich viele $x_\nu^{(n)} \in E$ $(\nu = 1,\dots,N_n)$ mit: $D \setminus \mathring{U}_\Delta^{(n)} \subset \bigcup_{\nu=1}^{N_n} \mathring{U}_{x_\nu^{(n)}}^{(n)} =: V_n$.
Für $B_n := \bigcup_{k=1}^{n} V_k \in \tau_{\mathfrak{g}}''$ $(n \in \mathbb{N})$ steigt dann $(B_n)_n$ auf gegen E, und es ist $B_n \in \mathcal{U}(E)$ (vgl. 8.3.a),
da $B_n \subset \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{\nu=1}^{N_k} U_{x_\nu^{(k)}}^{(k)} =: C_n$ und C_n $\tau_{\mathfrak{g}}''$-quasi-kompakt in E ist mit (8.4.2).
Also erfüllt $(B_n)_n$ die Voraussetzungen (2.12.1/2), weil nach (7.7) Y vor $\mathfrak{S}$ $\tau_{\mathfrak{g}}''$-quasilinksstetig auf E ist und für $I \subset E$ kompakt $(E \setminus I) \cap B_n \subset C_n$ ist. □

8.14 Beispiele:

1.) Nach (6.14) ist in den Beispielen (1.8.1/1.8.2/1.8.4/1.8.5.b) die Voraussetzung der Lokal-Quasi-Kompaktheit von $\tau_{\mathfrak{g}}'$ auf E_Δ jeweils erfüllt. Folglich bildet $\underline{\underline{J}}_+$ jeweils eine Lokalisierung der stark supermedianen Funktionen, die die Garbeneigenschaft erfüllt.

2.) Nach (6.13) ist für die Beispiele (1.8.3/1.8.5.a) die Voraussetzung der Lokal-Quasi-Kompaktheit von $(E_\Delta, \tau_{\mathfrak{g}}')$ bzw. $(E, \tau_{\mathfrak{g}}'')$ nicht erfüllt.

3.) Ist Y ein zu einem SFHK assoziierter Rechts-Prozeß auf $E = \mathrm{Ext}\,\Sigma_1$ (vgl. 3.8), so gilt die Aussage von (8.13), falls die faziale Topologie auf $\mathrm{Ext}\,\Sigma_1$ lokal-quasi-kompakt ist.

Weitere Bemerkungen zur Lokalisierung stark supermedianer bzw. exzessiver Funktionen bei Rechts-Prozessen, sowie speziell bei SHK sind Gegenstand von § 9. Dafür, daß $\underline{\underline{J}}_+$ eine Lokalisierung der stark supermedianen Funktionen ist, wird die volle Bedingung aus (8.13) der Lokal-Quasi-Kompaktheit von $(D, \tau_{\mathfrak{g}}')$ nicht benötigt (vgl. 9.4), sondern nur die Existenz einer $\tau_{\mathfrak{g}}''$-quasi-kompakten Ausschöpfung von E, die auch in den Beispielen (1.8.3/1.8.5.a) erfüllt ist (vgl. 9.11.2).

§ 9 $\mathcal{P}$-Lokalisierung bei Rechts-Prozessen und Standard-H-Kegeln

Zum Abschluß werden Folgerungen aus den Ergebnissen der letzten Paragraphen für die Lokalisierung stark supermedianer und exzessiver Funktionen bei Rechts-Prozessen diskutiert.

Als Spezialfall werden die zu SFHK (auf einer Menge E) assoziierten Rechts-Prozesse untersucht. Im Falle der Lokal-Quasi-Kompaktheit der fazialen Topologie und der Existenz einer fazial-quasi-kompakten Ausschöpfung von E ergibt sich die Garbeneigenschaft für eine Lokalisierung, die Prozeß-unabhängig zu formulieren ist. Als Folgerung erhält man für SBR eine lokale harmonische Struktur, die hinsichtlich der Beschränktheits-Voraussetzung eine geringfügige Verallgemeinerung der in [4] definierten Struktur darstellt.

9.1 Bezeichnungen:

Wir setzen die Situation von (8.2.2) voraus:
$(V_\alpha)_{\alpha>0}$ sei markovsche Ray-Resolvente auf (K,τ) mit Nicht-Branch-Punkt-Menge D und Ray-Halbgruppe $(Q_t)_{t\geq 0}$, wobei gelte:

(1) es existiert ein absorbierender Punkt $\Delta \in D$;

(2) D ist dicht in K;

(3) die stetigen α-exzessiven Funktionen trennen die Punkte auf K (für ein $\alpha \geq 0$).

Es seien ferner $E := D \setminus \{\Delta\}$, $\mathcal{G} := \mathcal{T}_c^\infty + \mathbb{R}$ auf K und $\tau\varphi' := \tau\varphi|_D$, $\tau\varphi'' := \tau\varphi|_E$.
$(P_t)_{t\geq 0}$ bzw. $(U_\alpha)_{\alpha>0}$ seien die Einschränkungen auf E von (Q_t) bzw. (V_α).

Y bezeichne den Rechts-Prozeß aus (7.1.3) auf $(E, \mathcal{B}(E))$ mit Übergangshalbgruppe (P_t). Dieser erfüllt (vgl. 8.12) die Voraussetzungen des Paragraphen 2.

$\mathcal{E}^{\alpha}$ bezeichne die bzgl. (P_t) (oder (U_α)) α-exzessiven Funktionen auf E und $\mathcal{F}^*$ die stark supermedianen. Alle auftretenden Funktionen auf E seien auf $D = E \cup \{\Delta\}$ durch Null in Δ fortgesetzt.

9.2 Definition:

Es seien für $\sigma \in \tau_{\mathcal{G}}''$:

a) $\mathcal{K}(\sigma) := \{C \subset \sigma \mid C \ \tau_{\mathcal{G}}''\text{-quasi-kompakt}\}$;

$\mathcal{U}(\sigma) := \{U \in \tau_{\mathcal{G}}'' \mid$ es gibt ein $C \in \mathcal{K}(\sigma)$ mit $U \subset C \subset \sigma\}$:

$\mathcal{E}^{lok}(\sigma) := \{f \in \mathcal{E}_e \mid$ auf jedem $U \in \mathcal{U}(\sigma)$ ist f beschränkt$\}$.

b) $\mathcal{T}(\sigma) := \{f \in \mathcal{B}^n(E) \mid f \geq -s$ für ein $s \in \mathcal{E}^{lok}(\sigma)$ und $\Pi_U f \neq f$ für jedes $U \in \mathcal{U}(\sigma)\}$.

c) $\mathcal{H}^*(\sigma) := \{f \in \mathcal{T}(\sigma) \mid t \longmapsto f \circ Y_t$ ist P^x-f.s. rechtsseitig unterhalbstetig in $t = o$ für alle $x \in \sigma\}$,

und $\mathcal{E}(\sigma) := \mathcal{H}_+^*(\sigma)$.

d) $\underline{\underline{\mathcal{T}}} := (\mathcal{T}(\sigma))_{\sigma \in \tau_{\mathcal{G}}''}$, $\underline{\underline{\mathcal{H}^*}}$, $\underline{\underline{\mathcal{E}}}$ analog.

9.3 Bemerkung:

Falls $\Delta \in K$ isoliert ist, so lassen sich gemäß (7.13) die unter (9.2) definierten Objekte mittels der $\mathcal{G}_1$-Choquet-Topologie auf E beschreiben ($\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}|_{K \setminus \{\Delta\}}$) .

Überdies ist $(E, \tau_{\mathcal{G}}'')$ quasi-kompakt, so daß $\mathcal{U}(E)$ die Voraussetzungen von (2.12) erfüllt (vgl. 8.12.2).

Im allgemeinen Fall gilt folgendes:

9.4 Lemma:

Falls E eine abzählbare $\tau_{\mathcal{G}}''$-quasi-kompakte Ausschöpfung besitzt (d.h.: $E = \bigcup_n B_n$ mit $B_n \in \mathcal{K}(E)$ so, daß B_n enthalten ist im $\tau_{\mathcal{G}}''$-offenen Kern $\overset{\circ}{B}_{n+1}$ von B_{n+1} für $n \in \mathbb{N}$),

so erfüllt das System $\mathcal{U}(E)$ die Voraussetzungen des Satzes (2.12).

Beweis:
Da Y bzgl. $\tau_{\mathfrak{f}}'$ quasilinksstetig ist in D (nach 7.7), gilt (2.12.1). Ist ferner $L \subset E$ τ-kompakt, so sind $E \setminus L$ und $U_n := (E \setminus L) \cap \overset{\circ}{B}_n$ $\tau_{\mathfrak{f}}''$-offen mit $U_n \subset B_n \subset E$, also ist $U_n \in \mathcal{U}(E)$, und es gilt (2.12.2). □

9.5 Folgerung:

Es habe E eine abzählbare $\tau_{\mathfrak{f}}''$-quasi-kompakte Ausschöpfung (vgl. 9.4). Für $f \in \mathcal{B}_+^n(E)$ gilt dann:

a) $f \in \mathcal{T}_+(E)$ genau dann, wenn $f \in \mathcal{S}^*$ ist;

b) $f \in \mathcal{E}(E)$ genau dann, wenn $f \in \mathcal{E}$ ist.

Beweis:
Wegen (9.4) folgen die Behauptungen aus (2.12) bzw. (2.13). □

Aus (9.5) ergibt sich, daß die Prägarbendaten $\underline{\underline{\mathcal{T}}}_{+}$ und $\underline{\underline{\mathcal{E}}}$ Lokalisierungen der supermedianen bzw. exzessiven Funktionen bilden, sofern $(E, \tau_{\mathfrak{f}}'')$ die Voraussetzung unter (9.5) erfüllt oder Δ isoliert ist in K (vgl. 9.3).

Die Garbeneigenschaft hierfür liefert der folgende

9.6 Satz:
Es gelte für $(E, \tau_{\mathfrak{f}}'')$:
(i) E hat eine abzählbare $\tau_{\mathfrak{f}}''$-quasi-kompakte Ausschöpfung
(oder: Δ ist isoliert in K)
(oder: Δ hat eine $\tau_{\mathfrak{f}}'$-quasi-kompakte Umgebungsbasis).
(ii) $\tau_{\mathfrak{f}}''$ ist lokal-quasi-kompakt.
Dann bilden $\underline{\underline{\mathcal{T}}}_{+}$ und $\underline{\underline{\mathcal{E}}}$ Garbendaten, und es ist $\mathcal{T}_+(E) = \mathcal{S}^*$ und $\mathcal{E}(E) = \mathcal{E}$.
Falls überdies für $x \in E$ $P^x(\mathfrak{f} < \infty) = 1$ ist, so bilden $\underline{\underline{\mathcal{T}}}$ und $\underline{\underline{\mathcal{H}^*}}$ Garbendaten.

Beweis:
Die Behauptungen folgen aus (8.12/8.13) sowie (9.5). □

Anstelle von (9.2.c) bietet sich eine andere Lokalisierung der exzessiven Funktionen an, die der Shur'schen bei Standard-Prozessen entspricht:

9.7 Definition:

Für $\sigma \in \tau_\eta''$ sei
$\mathcal{E}^1(\sigma) := \{ f \in \mathcal{T}_+(\sigma) \mid$ für $x \in \sigma$ und eine gegen $\{x\}$ absteigende τ_η''-Umgebungsbasis $(U_n)_n \subset \mathcal{U}(\sigma)$ mit $P^x(T_{\complement U_n} \searrow 0) = 1$ gilt: $\lim_n \Pi_{U_n} f(x) = f(x) \}$.

9.8 Lemma:

a) Für $\sigma \in \tau_\eta''$ ist $\mathcal{E}(\sigma) \subset \mathcal{E}^1(\sigma)$;

b) falls $\Delta \in K$ isoliert ist oder falls E eine abzählbare τ_η''-quasi-kompakte Ausschöpfung hat, gilt $\mathcal{E}(E) = \mathcal{E}^1(E) = \mathcal{E}$.

Beweis:
a) Es seien $\sigma \in \tau_\eta''$, $f \in \mathcal{E}(\sigma)$, $x \in \sigma$, $(U_n)_n \subset \mathcal{U}(\sigma)$ τ_η''-Umgebungsbasis mit $(U_n) \searrow \{x\}$ und $\lim_n P^x(T_{\complement U_n} \searrow 0) = 1$, d.h. gemäß (2.5): x sei Nicht-Warte-Punkt.
Dann ist P^x-f.s.: $\lim_n f \circ Y_{T_{\complement U_n}} = f \circ Y_0$ (da $f \in \mathcal{E}(\sigma)$) .

Es folgt:

$$f(x) \underset{f \in \mathcal{T}_+(0)}{\geq} \overline{\lim_n} \Pi_{U_n} f(x) \geq \underline{\lim_n} E^x(f \circ Y_{T_{\complement U_n}}, T_{\complement U_n} < \infty)$$

$$\underset{\text{Fatou}}{\geq} E^x(\underline{\lim_n} f \circ Y_{T_{\complement U_n}}) = E^x(\lim_n f \circ Y_{T_{\complement U_n}}) = f(x) .$$

b) Es sei $f \in \mathcal{E}^1(E)$, dann ist $f \in \mathcal{T}_+(E) = \mathcal{S}^*$ (in jedem der Fälle nach 9.3 bzw. 9.5.a). Also ist f supermedian mit (2.10.1) und $f \in \mathcal{E} = \mathcal{E}(E)$ mit (2.7) bzw. (9.5.b).
□

9.9 Satz:

Falls für (E, τ_η'') die Voraussetzungen (9.6.i/ii) gelten,

bildet $\underline{\underline{\mathcal{E}}}^1 := (\mathcal{E}^1(\sigma))_{\sigma \in \tau_\mathcal{G}''}$ ein Garbendatum mit $\mathcal{E}^1(E) = \mathcal{E}$.

Beweis:
Die Behauptungen folgen aus (8.12.1) und (9.8), wenn man beachtet, daß für $\sigma = \bigcup_i \sigma_i$ $(\sigma_i \in \tau_\mathcal{G}'')$ und $x \in \sigma$ eine abzählbare gegen $\{x\}$ absteigende $\tau_\mathcal{G}''$-Umgebungsbasis $(U_n)_n \subset \mathcal{U}(\sigma)$ existiert und diese schließlich in einem der σ_i liegt (vgl. 5.12.b). □

Unter den Voraussetzungen (9.6.i/ii) an die $\mathcal{G}$-Topologie folgt insbesondere, daß Exzessivität eine in der $\mathcal{G}$-Topologie auf E lokale Eigenschaft ist, denn auf Grund der Garbeneigenschaft der Lokalisierungen $\underline{\underline{\mathcal{E}}}$ oder $\underline{\underline{\mathcal{E}}}^1$ folgt: eine Funktion f auf E ist exzessiv genau dann, wenn zu jedem Punkt $x \in E$ eine $\tau_\mathcal{G}''$-offene Umgebung W_x von x existiert, in der f '(lokal) exzessiv' ist (d.s.h. daß $f \in \mathcal{E}(W_x)$ oder $f \in \mathcal{E}^1(W_x)$ ist).

9.10 Bemerkung:

Hinreichend für die Aussage von (9.6) bzw. (9.9) ist natürlich die Lokal-Quasi-Kompaktheit von $(D, \tau_\mathcal{G}')$. Also bilden in der Situation (8.13) $\underline{\underline{\mathcal{E}}}$ bzw. $\underline{\underline{\mathcal{E}}}^1$ aus (9.2/9.7) Lokalisierungen der exzessiven Funktionen des Rechts-Prozesses, die die Garbeneigenschaft besitzen.

9.11 Beispiele:

1.) Gemäß (8.14.1) und (9.10) besitzen die jeweiligen Lokalisierungen der exzessiven Funktionen der Rechts-Prozesse in den Beispielen (1.8.1/1.8.2/1.8.4/1.8.5.b) die Garbeneigenschaft. Speziell ist Exzessivität jeweils eine in der $\mathcal{G}$-Topologie auf E lokale Eigenschaft.

2.) In Beispiel (1.8.3) und (1.8.5.a) liefern die Mengen $B_n := E \setminus K_{1/n}(\Delta)$ jeweils eine $\tau_\mathcal{G}''$-quasi-kompakte Ausschöpfung von E , wobei $K_{1/n}(\Delta)$ offene 1/n-Kugeln um Δ in der Ray-Metrik seien.

Also bilden auch hier (gemäß 9.5) $\underline{\underline{\mathcal{I}}}_{\pm}$ und $\underline{\underline{\mathcal{E}}}$ jeweils eine Lokalisierung der stark supermedianen bzw. exzessiven Funktionen.

Für diese kann aber die Garbeneigenschaft nicht mittels (9.6) gezeigt werden, da gemäß (6.13) die Voraussetzung (9.6.ii) nicht erfüllt ist.

Als Beispiel-Klasse betrachten wir abschließend die im Kontext von SHK auftretenden Rechts-Prozesse.

Seien dazu mit den Bezeichnungen aus (3.8)
$D = E_{\Delta} = E \cup \{0\} = \mathrm{Ext}\,\Sigma_1$ für das Simplex $\Sigma_1 \subset S^*$ (wo S SFHK auf gesättigtem E ist);
$K := \overline{E} \cup \{0\}$, $\tau := \tau^*_0|_K$; $Y, \mathcal{G}, \tau_{\mathcal{G}}, \tau'_{\mathcal{G}}, \tau''_{\mathcal{G}}, f^*, \mathcal{E}$ wie bisher definiert; ebenso die Prägarben $\underline{\underline{\mathcal{I}}}$, $\underline{\underline{\mathcal{H}}}^*$, $\underline{\underline{\mathcal{E}}}$ wie unter (9.2).
Ferner bezeichne τ_{faz} die faziale Topologie auf $\mathrm{Ext}\,\Sigma_1$ und τ'_{faz} deren Einschränkung auf E.
$\varepsilon_x^{\mathcal{C}U}$ bezeichne für $x \in E$, $U \in \tau|_E$ die gefegten Maße aus (3.12).

9.12 Bemerkungen:
1.) Nach (6.12) ist $\tau_{faz} = \tau_{\mathcal{G}}$ und $\tau'_{faz} = \tau_{\mathcal{G}}''$, also für $\mathcal{O} \in \tau'_{faz}$: $\mathcal{U}(\mathcal{O}) = \left\{ U \in \tau'_{faz} \,\middle|\, \exists\ C\ \tau'_{faz}\text{-quasi-kompakt: } U \subset C \subset \mathcal{O} \right\}$
$\mathcal{E}^{lok}(\mathcal{O}) = \left\{ s \in \mathcal{E}_e \,\middle|\, s \text{ beschränkt auf jedem } U \in \mathcal{U}(\mathcal{O}) \right\}$.
2.) Gemäß (3.9.4) ist im SHK-Kontext die Voraussetzung der f.s. endlichen Lebenszeit aus (8.10) erfüllt.

9.13 Lemma:
Es ist für $\mathcal{O} \in \tau'_{faz}$ und $f \in \mathcal{B}^n(E)$ τ-unterhalbstetig in $\mathcal{O}$:
$f \in \mathcal{H}^*(\mathcal{O})$ genau dann, wenn:
(i) $f \geq -s$ für ein $s \in \mathcal{E}^{lok}(\mathcal{O})$;
(ii) $\varepsilon_x^{\mathcal{C}U}(f) \leq f(x)$ für alle $U \in \mathcal{U}(0)$ und $x \in U$.

Beweis:

'$\Longrightarrow$': Nach (3.14) ist $\varepsilon_x^{\mathcal{U}_U}(f) = Tr_U f(x)$ für $U \in \tau'_{faz}$ und $x \in U$.

'$\Longleftarrow$': Wegen der Rechtsstetigkeit der Pfade von Y gilt $Y_t \xrightarrow[t \searrow o]{} Y_o$, weshalb für $x \in \mathcal{O}$ und f unterhalbstetig in $\mathcal{O}$ $\liminf_{t \searrow o} f \circ Y_t \geq f \circ Y_o$ ist. □

9.14 Definition:

Es seien für $\mathcal{O} \in \tau'_{faz}$:

$${}^2\mathcal{K}^*(\mathcal{O}) := \{ f \in \mathcal{B}^n(E, \tau|_E) \mid f \text{ } \tau\text{-unterhalbstetig in } \mathcal{O},\ f \geq -s \text{ für ein } s \in \mathcal{E}^{lok}(\mathcal{O}),\ \varepsilon_x^{\mathcal{U}_U}(f) \leq f(x) \text{ für alle } U \in \mathcal{U}(\mathcal{O}),\ x \in U \};$$

$$\mathcal{E}^2(\mathcal{O}) := {}^2\mathcal{K}_+^*(\mathcal{O}) ;\ \underline{\underline{{}^2\mathcal{K}^*}} := ({}^2\mathcal{K}^*(\mathcal{O}))_{\mathcal{O}} ;\ \underline{\underline{\mathcal{E}^2}} := (\mathcal{E}^2(\mathcal{O}))_{\mathcal{O}} .$$

9.15 Bemerkung:

1.) Es ist für $\mathcal{O} \in \tau'_{faz}$:

${}^2\mathcal{K}^*(\mathcal{O}) = \{ f \in \mathcal{K}^*(\mathcal{O}) \mid f \text{ } \tau\text{-unterhalbstetig in } \mathcal{O} \}$ (vgl. 9.13).

2.) Falls E eine τ'_{faz}-quasi-kompakte Ausschöpfung besitzt, so liefert $\underline{\underline{\mathcal{E}^2}}$ eine Lokalisierung der exzessiven Funktionen, denn dann ist: $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^2 \subset \mathcal{E}(E) = \mathcal{E}$ nach (9.5.b).

Unter den (9.6.i/ii) entsprechenden Voraussetzungen an die faziale Topologie bilden $\underline{\underline{{}^2\mathcal{K}^*}}$ und $\underline{\underline{\mathcal{E}^2}}$ Garbendaten:

9.16 Satz:

Es habe (E, τ'_{faz}) die folgenden Eigenschaften:

(i) E hat eine abzählbare τ'_{faz}-quasi-kompakte Ausschöpfung; (oder: 0 besitzt eine τ_{faz}-quasi-kompakte Umgebungsbasis).

(ii) τ'_{faz} ist lokal-quasi-kompakt.

Dann bilden $\underline{\underline{{}^2\mathcal{K}^*}}$ und $\underline{\underline{\mathcal{E}^2}}$ Garbendaten, und es ist

${}^2\mathcal{K}_+^*(E) = \mathcal{E}^2(E) = \mathcal{E}$, also $\mathcal{E}_b^2(E) \subset S \subset \mathcal{E}^2(E)$.

Beweis:
Wegen (9.15.1) folgt die Garbeneigenschaft mit (9.6/9.12.2), die weiteren Beziehungen aus (9.14.2) mit (3.9.3/3.3.3).

9.17 Folgerung:
Ist Σ_1 Bauer-Simplex, so bildet $\underline{\underline{{}^2\mathcal{H}^*}}$ ein Garbendatum mit ${}^2\mathcal{H}^*_+(E) = \mathcal{E}$.

Beweis:
Falls Σ_1 Bauer-Simplex ist, ist $\tau'_{faz} = \tau|_E$ und $(E,\tau|_E)$ lokalkompakt mit abzählbarer Basis (vgl. 3.9.4), so daß (9.16.i/ii) erfüllt sind. □

9.18 Bemerkungen:

1.) Wenn die faziale Topologie den Voraussetzungen (9.16.i/ii) genügt, liefert somit $\underline{\underline{{}^2\mathcal{H}^*}}$ eine lokale harmonische Struktur für SFHK S. Man bezeichnet $\underline{\underline{{}^2\mathcal{H}^*}}$ als das zu S assoziierte hyperharmonische (Prä-)Garbendatum.

(9.16.i/ii) sind erfüllt in den Beispielen (1.8.1) und (1.8.2), nicht erfüllt in (1.8.3) und (1.8.5.a) (vgl. 6.6/6.13).

2.) Beispiel (1.8.5.b) liefert gemäß (3.15.3) einen SBR, so daß die zu dem assoziierten SHK gebildeten Funktionenklassen $({}^2\mathcal{H}^*(\sigma))_\sigma$ nach (9.17) ein Garbendatum bilden.

3.) Ist Σ_1 Bauer-Simplex, so bildet für $\sigma \in \tau|_E$ $\mathcal{U}(\sigma)$ die Menge der $\tau|_E$-offenen relativ-kompakten Teilmengen in σ und folglich $\mathcal{E}^{lok}(\sigma)$ die lokal-beschränkten endlichen exzessiven Funktionen auf E.

4.) Ist $(E,\mathcal{W})$ ein SBR (im Sinne von [4]), so bildet $\mathcal{W}$ die exzessiven Funktionen einer Resolvente $(W_\alpha)_{\alpha \geq 0}$ auf E, welche durch Doob-Transformation mittels eines $p \in \mathcal{W} \cap \mathcal{P}(E)$ aus einer Resolvente $(U_\alpha)_{\alpha \geq 0}$ hervorgeht, wobei gilt: die

f.s.-endlichen exzessiven Funktionen $\mathcal{E}_f(U_\alpha)$ von (U_α) stellen einen SFHK auf den Extremalpunkten eines Bauer-Simplexes dar (vgl. 3.10.2).

Ist in der Situation (9.18.4) $\underline{\underline{{}^2\mathcal{K}^*}}$ das zu $\mathcal{E}_f(U_\alpha)$ als SFHK gebildete hyperharmonische Garbendatum, so sei für $\sigma\in\tau|_E$: ${}^2\tilde{\mathcal{K}}^*(\sigma) := p.{}^2\mathcal{K}^*(\sigma)$.

Im folgenden wird gezeigt, daß das Garbendatum $\underline{\underline{{}^2\tilde{\mathcal{K}}^*}}$ zu einem SBR $(E,\mathcal{W})$ eine harmonische Struktur liefert, die im wesentlichen mit der von Bliedtner/Hansen [4] definierten übereinstimmt. Dazu bezeichne ${}^1\tilde{\mathcal{K}}^*(\sigma)$ für $\sigma\in\tau|_E$ die in [4] -§3 definierten lokal-hyperharmonischen Funktionen zu $(E,\mathcal{W})$. Ferner seien $\tilde{\varepsilon}_x^A$ die gefegten Maße bzgl. des Kegels $\mathcal{W}$ und $\mathcal{U}_c(\sigma)$ die relativ-kompakten offenen Mengen in σ .

9.19 Satz:

Für das Garbendatum $\underline{\underline{{}^2\tilde{\mathcal{K}}^*}}$ auf E gilt:
${}^2\tilde{\mathcal{K}}^*(\sigma) \supset {}^1\tilde{\mathcal{K}}^*(\sigma)$ für $\sigma\in\tau|_E$ und ${}^2\tilde{\mathcal{K}}^*_+(E) = \mathcal{E} = {}^1\tilde{\mathcal{K}}^*_+(E)$.

Beweis:
Es ist für $\sigma\in\tau|_E$
${}^1\tilde{\mathcal{K}}^*(\sigma) = \{f\in\mathcal{B}(E) \mid f\ \tau\text{-unterhalbstetig in } \sigma,\ f\geq -q \text{ für ein stetiges Potential } q,\ \tilde{\varepsilon}_x^U(f)\leq f(x) \text{ für } U\in\mathcal{U}_c(\sigma), x\in U\}$.
Auf Grund der Beziehung $\mathcal{E}(W_\alpha) = p\cdot\mathcal{E}(U_\alpha)$ erhalten wir für $g\in\mathcal{E}(W_\alpha)$:
$\tilde{\varepsilon}_\cdot^A(g) = \inf\{s\in\mathcal{E}(W_\alpha) \mid s\geq g \text{ auf } A\}$
$= p\cdot\inf\{t\in\mathcal{E}(U_\alpha) \mid t\geq g/p \text{ auf } A\} = p\cdot\varepsilon_\cdot^A(g/p)$,
und diese Beziehung bestimmt die Maße eindeutig (da die exzessiven Funktionen jeweils die Maße trennen).

Es folgt für $f\in{}^1\tilde{\mathcal{K}}^*(\sigma)$:

1.) $\varepsilon_x^{\complement U}(f/p) = (1/p)\,\tilde{\varepsilon}_x^{\complement U}(f) \leq (f/p)$ für $U \in \mathfrak{U}_c(\sigma) = \mathfrak{U}(\sigma)$;

2.) $(f/p) \geq (-a/p)$ mit $(a/p) \in \mathcal{E}^{lok}(\sigma)$, da p stetig;

3.) (f/p) τ-unterhalbstetig in σ , da p stetig .

Also ist ${}^1\tilde{\mathcal{H}}^*(\sigma) \subset p.{}^2\mathcal{H}^*(\sigma)$.

Ferner ist ${}^2\tilde{\mathcal{H}}_+^*(E) = {}^1\tilde{\mathcal{H}}_+^*(E)$, da die Beschränktheits-Bedingung entfällt und die Meßbarkeits-Bedingung wegen der Unterhalbstetigkeit auf E erfüllt ist. □

9.20 Bemerkung:

Die Inklusion ${}^2\tilde{\mathcal{H}}^*(\sigma) \supset {}^1\tilde{\mathcal{H}}^*(\sigma)$ ist im allgemeinen nicht nur wegen der Meßbarkeits-Bedingung strikt; z.B. für den Balayage-Raum $\mathbb{R}_+$ mit den exzessiven Funktionen der 'Bewegung nach rechts' ist mit $p=1$ $-1 \in {}^2\mathcal{H}^*(\sigma) \setminus {}^1\tilde{\mathcal{H}}^*(\sigma)$ für $\sigma \subset \mathbb{R}_+$ offen, da alle stetigen Potentiale in $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$ liegen.

§ 10 Schlußbemerkungen

Das Folgende konnte gezeigt werden:

Für Rechts-Prozesse auf den Nicht-Branch-Punkten von Ray-Resolventen, deren zugehörige $\mathcal{J}$-Topologie die Bedingungen (9.6.i/ii) erfüllt, bildet $\underline{\underline{\mathcal{T}}}_{+}$ bzw. $\underline{\underline{\mathcal{E}}}$ aus (9.2) eine Lokalisierung der stark supermedianen bzw. exzessiven Funktionen, die die Garbeneigenschaft besitzt, d.h. für diese ist Exzessivität eine in der $\mathcal{J}$-Topologie lokale Eigenschaft.

Für gewisse Standard-Funktionen-H-Kegel, wo die zugehörige faziale Topologie die Bedingungen (9.16.i/ii) erfüllt, bildet ${}^{2}\underline{\underline{\mathcal{K}}}^{*}$ aus (9.14) ein assoziiertes hyperharmonisches Garbendatum.

Zu (9.6.i/ii) bzw. (9.16.i/ii) äquivalente Bedingungen in Termen des Prozesses bzw. des SFHK konnten nicht angegeben werden.

In Beispiel (1.8.3) sieht man, daß Exzessivität eine lokale Eigenschaft in der zugehörigen Choquet-Topologie ist, obwohl die Bedingungen nicht erfüllt sind.

Verzicht auf die Voraussetzung der Lokal-Quasi-Kompaktheit scheint jedoch eine völlig neue Beweisidee (anstelle der Shur'schen) zu erfordern.

Verschiedene Fragen zum Zusammenhang der Topologien und Meßstrukturen sind offen geblieben, z.B.:

Gilt die Äquivalenz der Lokal-Quasi-Kompaktheit und der Existenz einer abzählbaren Basis stets?

Liegt stets Gleichheit der Borel-Strukturen vor, oder gilt dies wenigstens im Standard-H-Kegel-Kontext?

Stimmt die Charakterisierung der Choquet-Topologie über die Balayage-Mengen, z.B. unter den Voraussetzungen (8.2.2), auch auf dem Kompaktum K (vgl. 6.9.3)?

Die betrachteten Rechts-Prozesse sind offenbar genau die, deren Zustandsraum schon die Nicht-Branch-Punkt-Menge einer

geeigneten Ray-Kompaktifizierung bildet (i.a. kann man nur Inklusion erwarten, vgl. 1.6).

Auf diese Einschränkung kann vermutlich verzichtet werden. Z.B. kann man zeigen, daß die $\mathcal{C}$-Choquet-Topologie (ebenso wie die Ray-Topologie, vgl. [21]-§15) auf dem Zustandsraum E eines Rechts-Prozesses (im Sinne von Getoor [21]) unabhängig von der jeweiligen Ray-Kompaktifizierung ist: ferner ergibt sich, daß auch in diesem Fall f.s. Choquet-Linkslimiten in E existieren, was für den Nachweis der Eigenschaften des Prozesses in der Choquet-Topologie wesentlich ist.

Möglicherweise lassen sich die Ergebnisse formulieren für die von Engelbert [20] definierten Rechts-Prozesse, da dafür auch Ray-Kompaktifizierungen existieren und damit die Choquet-Topologie dort auch definierbar ist (vgl. [20]-IV-§7/VI-§9).

Eine ähnliche Frage stellt sich im H-Kegel-Kontext, nämlich, ob man hyperharmonische Garbendaten auch zu Standard-Funktionen-H-Kegeln auf nahezu gesättigten Mengen (vgl. [8]-S.175) assoziieren kann.

Das Verhalten der Rechts-Prozesse wird insofern besser als durch die Ray-Topologie durch die Choquet-Topologie beschrieben, als bzgl. dieser Rechtsstetigkeit der Pfade mit Linkslimiten im Zustandsraum und Quasilinksstetigkeit vorliegen.

Jedoch sei abschließend auf einen unschönen Effekt hingewiesen, der bei der Lokalisierung in der Choquet-Topologie auftreten kann:
Man betrachte in Beispiel (1.8.5.b) anstelle der Kugel A eine entsprechende Menge $B \subset \mathbb{R}^3$ mit nach außen weisendem Lebesgue-Dorn

,
wobei B alle Randpunkte außer x enthält.

Der zeitgeänderte Prozeß ist ein Rechts-Prozeß in B mit Ray-Kompaktifizierung $B \cup \{x\}$, wobei x Branch-Punkt ist, dessen Branch-Verteilung Masse hat auf dem Rand von B. Da der Ausgangs-Prozeß die Menge B über x f.s. nie ver-

läßt, bildet B mit den exzessiven Funktionen des zeitgeänderten Prozesses sogar, wie man sich überlegt, einen Balayage-Raum, so daß Exzessivität hier eine in der euklidischen Topologie (die echt feiner ist als die Choquet-Topologie) lokale Eigenschaft ist.

Begriffs-Index

absolut stetig	0.6
($\mathfrak{F}$-)absorbierend	4.3
($\mathfrak{F}$-)affin	4.3
Austrittskern, ~-verteilung	2.1
Balayage-Menge	6.3
Bauer-Simplex	0.5
Bishop-DeLeuuw-Ordnung	0.5
Borel-Rechts-Prozeß	1.4
Branch-Punkt	1.1
degenerierter ~	7.9
Choquet-Rand	4.3
Choquet-Simplex	0.5
($\mathfrak{F}$-)Choquet-Topologie	4.9
Darstellungsmaß	0.5
Doob-Transformation	3.10
Erzeuger	3.3
(α-)exzessiv	0.6
Extremalpunkt	0.5
$\mathfrak{F}$-Topologie	4.9
fast sicher	0.7
faziale Topologie	0.5
Feller-Resolvente, starke ~	0.6
Funktion	0.2
endliche ~, numerische ~, (strikt) positive ~, reelle ~	0.2
Funktionen-H-Kegel (FHK)	3.1
$\mathfrak{g}$-Topologie	4.12/S.63
Garbeneigenschaft	S.2
Geburts- und Todes-Prozeß	1.8
Gefegte	3.11
H-Integral	3.1
H-Kegel, dualer ~	3.1
Hunt (Satz von)	2.2
Hunt-Prozeß	1.7

Initialkern	0.6
irregulär	2.1
Kern, (sub-)markovscher ~	0.6
kompakt	0.3
quasi-~, relativ-~, relativ-quasi-~	0.3
Kompaktifizierung	0.3
Konvergenz (Netz-~)	0.3
Lebenszeit	1.7
Lokalisierung	S.2
Markov-Prozeß (mit Übergangshalbgruppe)	0.7
rechtsstetiger~, normaler~	0.7
markovsch, sub-~	0.6
Maß	0.4
gefegtes ~	3.12
(F-)minimal	4.1
nahezu meßbar	0.7
natürliche Erweiterung	3.3
natürliche Topologie	3.2
Netz, Teil-~	0.3
Nicht-Branch-Punkt	1.1
Nicht-Warte-Punkt	2.4
Potentialkern, eigentlicher~	0.6
Prozeß	0.7
~ der gleichförmigen (Parallel-) Bewegung	1.8
zeitgeänderter ~	1.8
quasi-kompakt	0.3
quasilinksstetig	1.7
Ray (Theorem von)	1.2
~-Halbgruppe	1.2
~-Knight-Kompaktifizierung	1.6
~-Prozeß	1.3
~-Resolvente	1.1
~-Topologie	1.6

realisierbar 3.3
Rechts-Prozeß 1.4
(α-)Reduzierte 2.1/3.11
Referenzmaß 0.7
regulär 2.1
Regularisierung (α-exzessive) 2.3
relativ-(quasi-)kompakt 0.3
Resolvente (zugehörige) 0.6

schwache Einheit 3.1
Schwerpunkt 0.5
simplizial 4.3
Standard-Balayage-Raum (SBR) 3.10
Standard-Funktionen-H-Kegel (SFHK) 3.1
Standard-H-Kegel (SHK) 3.1
Standard-Prozeß 1.7
strukturelle Topologie 0.5
(α-)supermedian 0.6
stark $\sim$ 2.8

transient 0.7
Trefferkern, $\sim$ -verteilung 2.1

Umgebung 0.3
universell stetig 3.1

(μ-)Vervollständigung 0.4
universelle $\sim$ 0.4

Warte-Punkt 2.4

Symbol-Index

$'\prec'$	0.4/4.1
$\mathfrak{A}$	5.13
$\mathring{A}$, $\bar{A}$	0.3
A^r, A^i	2.1
A_x	4.9
$\mathcal{A}(\cdot)$	0.5
B	1.1
B^A	3.11
$B(\cdot)$	6.6
$\mathfrak{B}(\cdot)$, $\mathfrak{B}^u(\cdot)$, $\mathfrak{B}^n(\cdot)$	0.2
$\mathcal{L}(\cdot)$, $\mathcal{L}^u(\cdot)$, $\mathcal{L}^n(\cdot)$	0.3
$\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{L}^u}$	5.13
$\mathfrak{l}$	0.1
$\mathcal{L}(\cdot)$, $\mathcal{L}_o(\cdot)$, $\mathcal{L}_e(\cdot)$, $\mathcal{L}_u(\cdot)$	0.2
$\mathcal{Z}(\cdot)$	8.3/9.2
D	1.1
$(D, \tau_{\mathcal{G}}')$	5.12/8.2
Δ	1.2
D_A	2.1
$\partial_{\mathcal{F}} K$	4.3
$\partial_{\mathcal{G}} K$	4.4.3
E	1.4
$(E, \tau_{\mathcal{G}}'')$	5.12/8.2.2
$\mathcal{E}$, $\mathcal{E}(\cdot)$, $\mathcal{E}^\alpha$, $\mathcal{E}^\alpha(\cdot)$	0.6
$\mathcal{E}_f(\cdot)$	3.4
$\mathcal{E}_x$	0.4
$\mathcal{E}_x^A$	3.12
$\mathcal{E}^\mu$, $\mathcal{E}^u$	0.3
$\mathcal{E}(\mathcal{O})$, $\underline{\underline{\mathcal{E}}}$	8.11/9.2
$\mathcal{E}^1(\mathcal{O})$, $\underline{\underline{\mathcal{E}}}^1$	9 7/9.9
$\mathcal{E}^2(\mathcal{O})$, $\underline{\underline{\mathcal{E}}}^2$	9.14
$\mathcal{E}^{lok}(\mathcal{O})$	8.3/9.2
$Ext(\cdot)$	0.5
$\emptyset$	0.1
$f\|_A$	0.2
$\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_t$	1.4
f.s.	0.7
f_A, $f_A^{(\alpha)}$, $\hat{f}_A$, $\hat{f}_A^{(\alpha)}$	2.1/2.3
$\mathfrak{F}$, $\underline{\mathfrak{F}}$, $\overline{\mathfrak{F}}$, $\hat{\mathfrak{F}}$	4.1/4.3
$\mathcal{G}$	4.4.3
$\mathcal{G}_1$	5.12
$\mathcal{G}^\circ$, $\mathcal{G}_t^\circ$	1.3
$\mathcal{G}^\mu$, $\mathcal{G}_t^\mu$	S.72
$\mathcal{H}^*(\mathcal{O})$, $\underline{\underline{\mathcal{H}}}^*$	9.2
${}^1\mathcal{H}^*(\mathcal{O})$, ${}^1\underline{\underline{\mathcal{H}}}^*$	S.41/S.98
${}^2\mathcal{H}^*(\mathcal{O})$, ${}^2\underline{\underline{\mathcal{H}}}^*$	9.14
${}^2\tilde{\mathcal{H}}^*(\mathcal{O})$	9.18
inf	0.2
K_Δ	3.8
(K, τ)	4.4.3/8.2.2
(K_1, τ_1)	5.12
$\mathfrak{K}(\cdot)$	5.13
Λ	7.2
Λ_o	7.5
$\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$	0.1
$\mathcal{M}^+(\cdot)$, $\mathcal{M}_e^+(\cdot)$, $\mathcal{M}_1^+(\cdot)$	0.4
$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_o$	0.1
$(N_t)_{t \geq o}$	1.4

Ω	1.4
$\mathcal{R}(\cdot)$	0.5
P^{μ}	1.3
P^{x}	1.4
$(P_t)_{t\geq 0}$	1.4
P_A, P_A^{α}, Π_A, Π_A^{α}	2.1
$\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_+$	0.1
$(Q_t)_{t\geq 0}$	1.2/3.5/S.63
$(\widetilde{Q}_t)_{t\geq 0}$	3.8
$\mathcal{R}$	5.13
$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\overline{\mathbb{R}}$, $\overline{\mathbb{R}}_+$	0.1/0.2
R_s^A, $\hat{R}_s^A$	3.11/3.13
${}^{\mathcal{F}}Rg$, ${}^{\mathcal{F}}R_{\mu}g$, Rg	4.3/S.65
$\mathcal{S}$, $\mathcal{S}(\cdot)$, $\mathcal{S}^{\alpha}$, $\mathcal{S}^{\alpha}(\cdot)$	0.6
$\mathcal{S}^*$	2.8
S, $\langle S\rangle$, S_o, S^*	3.1
$\widetilde{S}$, $\tilde{s}$, S_u Σ_u	3.1
sup	0.2
σ, σ_{Δ}	1.4/S.21
$\sigma(\cdot)$	0.3
τ, $\tau_{\vert\cdot}$	0.3
τ_o, τ_o^*	3.1
$\tau_{\mathcal{F}}$, $\tau_{\mathcal{F}}'$, $\tau_{\mathcal{F}}''$	4.9/8.1
$\tau_{\mathcal{G}}$, $\tau_{\mathcal{G}}'$, $\tau_{\mathcal{G}}''$	4.12.3/5.12/9.1
τ_{faz}, τ_{str}	6.12
T_A	2.1
$Tr(\cdot)$	0.4
$\mathcal{T}(\cdot)$, $\underline{\underline{\mathcal{T}}}$	8.3/8.11/8.12/ 8.13/9.2
$(U_{\alpha})_{\alpha\geq 0}$, $(\widetilde{U}_{\alpha})_{\alpha\geq 0}$	3.9
$\mathcal{U}(\cdot)$, $\mathcal{U}_{\vert Z}(\cdot)$	5.1
$\mathcal{U}_{\mathcal{F}}(\cdot)$, $\mathcal{U}_{\mathcal{F}\vert Z}(\cdot)$	5.1
$\mathcal{U}(\sigma)$	8.3/9.2
$U_{\varepsilon}(\cdot)$	5.5
$\mathcal{V}$	2.11
$(V_{\alpha})_{\alpha>0}$	1.2/3.5/S.63/8.2.2
$(\widetilde{V}_{\alpha})_{\alpha\geq 0}$	3.8
$(V_{\alpha}^1)_{\alpha>0}$	7.13
W	1.3
X, $(X_t)_{t\geq 0}$	1.4
Y	7.1/9.1
Y^{μ}	S.72
$(Y_t)_{t\geq 0}$	1.3/S.63
Y_{T-}	7.1
Ξ_u	3.1
ζ	1.7

Literaturverzeichnis

[1] E.M.Alfsen: Compact Convex Sets and Boundary Integrals. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York (1971).

[2] L.Asimow, A.J.Ellis: Convexity Theory and Its Applications in Functional Analysis. Academic Press, New York (1980).

[3] H.Bauer: Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie. Lecture Notes in Math. 22, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York (1966).

[4] J.Bliedtner, W.Hansen: Markov Processes and Harmonic Spaces. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 42 (1978), 309-325.

[5] R.M.Blumenthal, R.K.Getoor: Markov Processes and Potential Theory. Academic Press, New York (1968).

[6] N.Boboc, Gh.Bucur: Cônes convexes de fonctions continues sur une espace compact. Topologies sur la frontière de Choquet. Rév.Roum.Math.Pures et Appl. XVII, No. 9 (1972), 1307-1316.

[7] N.Boboc, Gh.Bucur, A.Cornea: H-Cones and Potential Theory. Ann.Inst.Fourier 25 (1975), 71-108.

[8] N.Boboc, Gh.Bucur, A.Cornea, H.Höllein: Order and Convexity in Potential Theory: H-Cones. Lecture Notes in Math. 853, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York (1981).

[9] N.Boboc, A.Cornea: Convex Cones of Lower Semicontinuous Functions on Compact Spaces. Rév.Roum.Math.Pures et Appl. XII, No. 4 (1967), 421-525.

[10] N.Bourbaki: General Topology I.Hermann, Paris (1966).

[11] N.Bourbaki: Intégration Chap. IX (Livre VI). Hermann, Paris (1969).

[12] M.Brelot: Elêments de la théorie classique du potentiel. Centre De Documentation Universitaire, Paris (1959).

[13] C.Constantinescu, A.Cornea: Potential Theory on Harmonic Spaces. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York (1972).

[14] C.Dellacherie, P.A.Meyer: Probabilités et potentiel; Chap. I-IV. Hermann, Paris (1975).

[15] V.Dembinski, K.Janßen: Standard-Balayage Spaces and Standard Markov-Processes; in: Potential Theory Copenhagen 1979 (Proc.). Lecture Notes in Math. 787, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York (1980), 84-105.

[16] E.B.Dynkin: Markov Processes Vol. I. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York (1965).

[17] E.B.Dynkin, A.A.Juschkewitsch: Sätze und Aufgaben über Markoffsche Prozesse. Heidelberger Taschenbücher 51, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York (1969).

[18] E.G.Effros: Structure in Simplexes. Acta.Math. 117 (1967), 103-121.

[19] E.G.Effros: Structure in Simplexes II. J.Funct.Anal. 1 (1967), 379-391.

[20] H.J.Engelbert: Markov Processes in General State Spaces I-VII. Math.Nachr. 80 (1977) - 86 (1978).

[21] R.K.Getoor: Markov Processes: Ray Processes and Right Processes. Lecture Notes in Math. 440, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York (1975).

[22] A.Gleit: On the Structure Topology of Simplex Spaces. Pac. J.Math. 34, No. 2 (1970), 389-405.

[23] A.Gleit: Topologies on the Extreme Points of Compact Convex Sets I, II. Math.Scand. 31 (1972), 209-219 bzw. 33 (1973), 31-45.

[24] W.Hansen: Markov Processes on Standard Balayage Spaces. Preprint Bielefeld (Jan. 1980).

[25] K.Janßen: Standard H-Cones and Balayage Spaces. Preprint Düsseldorf (Juli 1981).

[26] J.I.Kelley: General Topology. Van Nostrand Comp., Princeton (1955).

[27] J.F.Mertens: Théorie des processus stochastiques géneraux. Applications aux surmartingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 22 (1972), 45-68.

[28] J.F.Mertens: Strongly Supermedian Functions and Optimal Stopping. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 26 (1973), 119-139.

[29] J.F.Mertens: Processus de Ray et théorie du balayage. Invent.Math. 23 (1974), 117-133.

[30] P.A.Meyer: Processus de Markov. Lecture Notes in Math. 26, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York (1967).

[31] P.A.Meyer: Probabilités et potentiel. Hermann, Paris (1966).

[32] G.Mokobodzki: Cônes de potentiels et noyaux subordonées; in: Potential Theory (C.I.M.E. Stresa 1969), Edizione Cremonese, Rom (1970), 207-248.

[33] G.Mokobodzki: Structure de cônes de potentiels. Sém. Bourbaki, 22e année. no. 377 (1969/70), 239-252.

[34] M.G.Shur: Localization of the Concept of an Excessive Function Connected with a Markov Process. SIAM: Theory of Probability and Applications (1962), 185-189.

Lebenslauf

Am 7. Februar 1955 wurde ich als Tochter des kaufmännischen Angestellten Gerhard Stich und seiner Frau Annegret in Düsseldorf geboren.

Von Ostern 1961 bis Ostern 1965 besuchte ich zunächst die Brehmschule Düsseldorf und dann die Volksschule Metzkausen, danach bis Juni 1967 das Konrad-Heresbach-Gymnasium Mettmann. Nach Übersiedlung in die Gegend von Hannover besuchte ich ab Juli 1967 das Gymnasium Großburgwedel, wo ich im Mai 1972 das Abitur (neusprachlich) bestand.

Ab WS 72/73 studierte ich bis zum Vordiplom im Oktober 1974 an der TU Hannover Mathematik und Physik, wechselte danach (WS 74/75) zur Universität Düsseldorf und legte im September 1978 die Diplomprüfung in Mathematik ab.

Seit Oktober 1978 bin ich als Mitarbeiterin (zunächst als Wiss.Hilfskr., seit Dezember 1979 als Verw.wiss.Ass.) am Institut für Statistik und Dokumentation der Universität Düsseldorf beschäftigt.

Seit Juli 1979 bin ich mit dem Dipl.-Phys. Ulrich Steffens verheiratet.